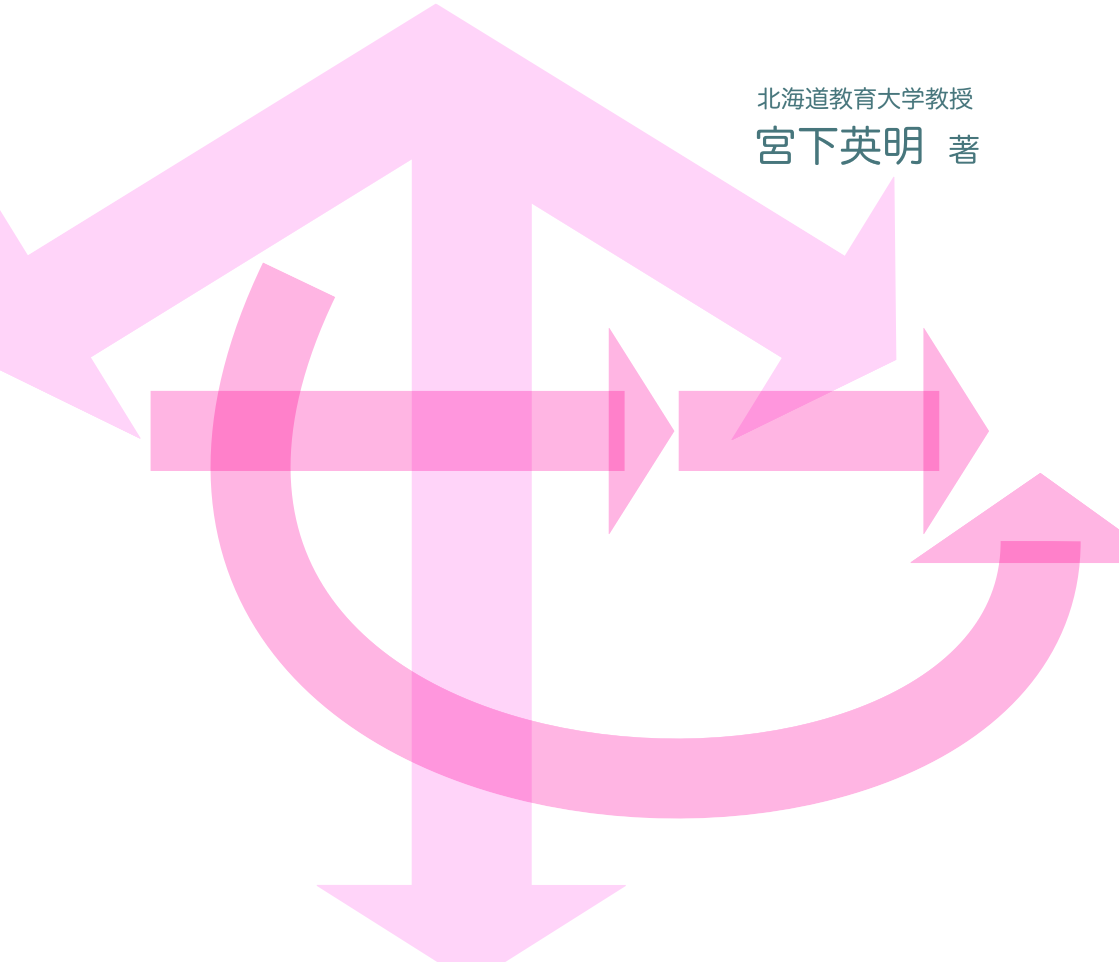
図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 シリーズ

数学編 (4)

四元数

北海道教育大学教授
宮下英明 著



文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」がわかる本 数学編 (4)

四元数

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている「四元数」を PDF 文書の形に改めたものです。

序

本書は，「数がわかる本」シリーズの第３です。

『いろいろな数がつくられるしくみ』では，

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

と流れる「数の構築」を扱いました。

これらが「数」であるという意味は，これらが「数」の形式をもっているということです。
『いろいろな数が「数」であること』では，この「数」の形式を，自然数・分数・正負の数・複素数を横断する形で，示しました。

数の構築の流れでは，複素数のつぎに四元数がきます。
本書は，この四元数に対して「数」の形式を改めて確認していくことを目的にするものです。

数の構築を一つ進め新しい数に出会うとき，これまでもっていた「数」のイメージが壊れます。
これは同時に，「数」の形式がより一般化 / 純化されて見えてくるということです。すなわち，数の本質がよりはっきりしてくるということです。
これは，四元数を学習する意義の一つになります。

本書が読者に求めることは，つぎの２つです：

1. 「正負の数 → 複素数 → 四元数」と流れる「数の構築」の意味を理解する。
2. 四元数を知ることで，「数」の形式の理解をさらに深める。

本書を読むには，『いろいろな数がつくられるしくみ』『いろいろな数が「数」であること』の両方に目を通しておくことが必要です。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

本論考は，四元数が

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

という「数」の構築の流れの中にどのように位置づくかを，解説しようとするものです。

数は，「量の比」の表現に使われるべく，つくられます。
対象にしたい量が違えば，数も違ってきます。
食材が違えば包丁も違ってくるのと，同じです。

正負の数は，対象にしたい量が「正逆２方向の大きさ」であるときに導かれてきます。

「正逆２方向の大きさ」は，「直線上方向自由な移動」が数学的モデルになります。
このモデルを「次元を増やす」方向に延長すると，「平面上方向自由な移動」が出てきます。そして，「平面上方向自由な移動」を量にしようとするとき，対応する数として複素数が導かれてきます。

この延長をさらに進めると，つぎが主題になります：

「３次元空間内方向自由な移動」を量としたときの，
これに対応する数を導く。

これに数学者ハミルトンが取り組みました。
そして，つぎのことを得ました：

「３次元空間内方向自由な移動」を量とする数は，つくれない。
「４次元空間内方向自由な移動」を量とする数は，つくれる。

「４次元空間内方向自由な移動」を量とする数として導いたのが，「四元数」です。

３次元空間内方向自由な移動は，４次元空間内方向自由な移動に埋め込めます。そしてこの状態で，四元数を適用できるものになります。
これが，四元数の実際応用性の構造です。

四元数を知識としてもっていることは，数学教育的にも意味があります。
数学教育論として「数」を論じているものの多くは，自然数で「数」を考えています。よって，没論理をやってしまい，しかし自分ではそのことに気づきません。
このとき，「数」の意味を

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数 → 四元数

の流れで押さえるようにすると，嫌でも没論理は自己訂正されていきます。

1.　四元数とは？

1.0　要旨

この節では，最初に，「数の構成」の流れにおける四元数の位置を簡単に説明します。

１次元実ベクトルを量にするような数をつくろうとすると，正負の数が導かれます。
２次元実ベクトルを量にするような数をつくろうとすると，複素数が導かれます。
この延長として，３次元実ベクトルを量にするような数をつくろうということになりますが，これはうまくいかず，４次元実ベクトルを量にするような数をつくろうとすると，いまくいきます。
こうして導かれた数が，四元数です。

つぎに，四元数を学習する意義を述べます。

ひとは，自分の知っている数で，「数」をわかったつもりになってしまいます。特に，自分の知っている「自然数」で，「数」をわかったつもりになります。そしてこの状態で「数」の議論をやると，それは必ず没論理になります。

四元数まで進むとき，自然数レベルの自分の「数」は完全に打ち壊されます。そして，「数の正しい理解」というものを改めて考えるようになります。

1.1　四元数とは？

２次元実ベクトル空間は，複素数体を係数体として，１次元ベクトル空間になります。
これは，２次元実ベクトルが，複素数を「数」として伴う「量」になることを意味します。

「量」では，つぎのことが条件になっています：
　任意の要素を単位として定め，
　任意の量を「単位の何倍」という形で一意的に表わせる。
これは ,「１次元」の意味に他なりません。

これの拡張として，つぎのことが自然に発想されてきます：

３次元実ベクトルを「量」にするような「数」をつくる。

２次元実ベクトルに対する複素数倍は ,「回転・倍」でした。
よって，これの拡張も「回転・倍」の意味と関わることが予想されます。

このアイデアをもって複素数の３次元拡張に取り組んだのが，数学者ハミルトン (W.R. Hamilton) です。
しかし，３次元拡張はうまくいかず，ハミルトンが到達したのは４次元拡張でした。これが四元数 (quaternion) です。

要点：
　複素数を「数」として，２次元実ベクトルは「量」になる。
　３次元実ベクトルを「量」にする「数」づくりは, うまくいかない。

四元数を「数」として，４次元実ベクトルは「量」になる。

1.2　四元数の学習意義

ほとんどのひとは，四元数の実際使用と無縁です。
また，四元数の学習は，簡単ではありません。
しかし，数学教育の観点に立てば，四元数の学習は重要です。

実際，数の学習が

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

と進むごとに，

それまで「数・量」の含意と思っていたことが否定され，
「数・量」の本質の見直しが行われる

ことになりました。

そして，四元数に進むと，つぎのような事実を見出すことになります：

A. 高次元ベクトルを「量」にする「数」拡張は，単純ではない。
B.「数の積（＝倍の合成）の可換性」は「数・量」の含意ではない

特に，B より，つぎのことがはっきり理解されるようになります：

数の積の順序をどうでもよいとする考えは，間違い。

2.　３次元ベクトルの回転・倍

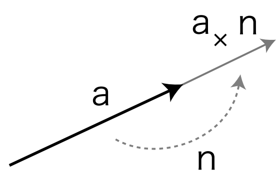
2.0　要旨

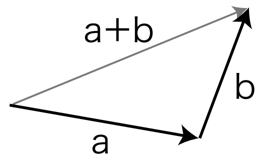
四元数が導かれるもとになったのは，「３次元実ベクトルを量にするような数をつくる」という考えです。そして，「３次元実ベクトルを量とする数がつくることができる」とは，３次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用を数にできるということです。
しかしこれはうまくいかず，「４次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用を数にできる」という結果になりました。これが四元数です。

この経緯から，四元数の理解には「３次元実ベクトルの回転・倍」の理解が必要になります。
そこで，この「３次元実ベクトルの回転・倍」を，本節で解説することにします。

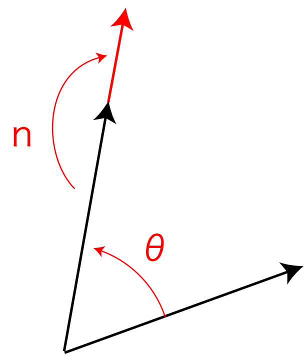
2.1　３次元ベクトルの回転・倍

一般に，ベクトルにおいては，(1) ベクトルに対するスカラ (数) の倍作用と，(2) ベクトルの和が，つぎのように定義されています：





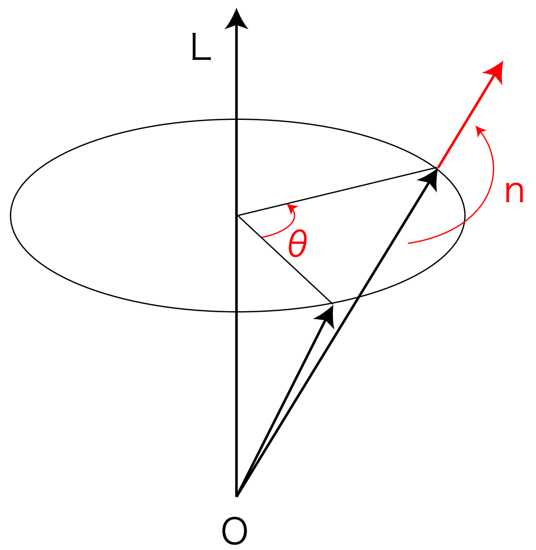
２次元実ベクトルでは，これの「倍と回転」が複素数の「倍作用」になりました。そして，複素数と２次元ベクトルが，「数と量」の関係になりました。



３次元実ベクトルの場合，「回転」は「一つの有向直線を回転軸とする回転」ということになります。

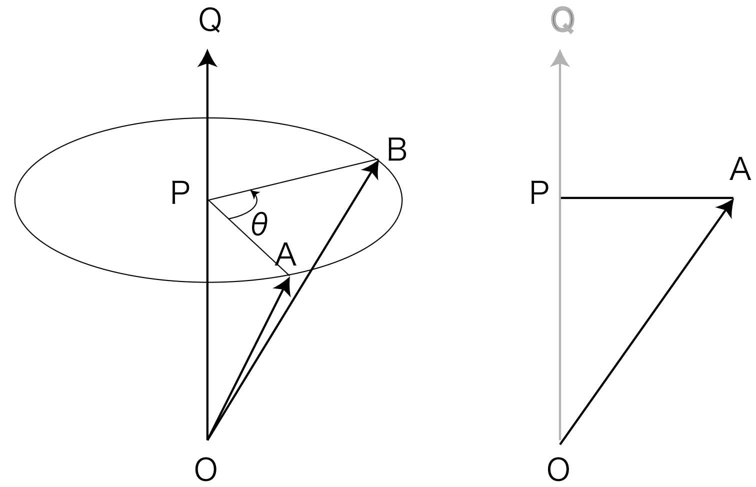
> 回転方向は，有向直線の向きと対面したときの左回り (時計の反対回り) を正と決めます。(言い換えると，回転して右ネジが進む方向と有向直線の向きが一致するときが，正。)

３次元実ベクトルに対する「回転・倍」の作用：



2.2　回転の計算

$\overrightarrow{OQ}$ ($|\overrightarrow{OQ}| = 1$) を回転軸とする θ 回転 $(0 < \theta < \pi)$ で，A が B に移るとします。
また，A の回転面と $\overrightarrow{OQ}$ の交点を P とします。



註：回転の正方向は，つぎのように定義される：
$\overrightarrow{OQ}$ の向きと対面して左回り (反時計回り) が正。
(言い換えると，回転して右ネジが進む方向が $\overrightarrow{OQ}$ の向きになるときが，正。)

Q の座標 (q_x, q_y, q_z), A の座標 (a_x, a_y, a_z), 角度 θ に対する B の座標 (b_x, b_y, b_z) は，以下のようにして求めることができます：

1. P を定める条件：

$$\overrightarrow{OP} = k\ \overrightarrow{OQ}$$
$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$$

この条件は，以下を含意する：

1. $k = q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z$
2. $|\overrightarrow{PA}| = r$ とするとき，
   $r^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OP}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - k^2$

2. B を定める条件：

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$
$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$$
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PB}| \cos\theta = r^2 \cos\theta$$
$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = t\ \overrightarrow{OQ} \quad (t > 0)\text{(註)}$$

この条件は，以下を含意する：

1. $k = q_x b_x + q_y b_y + q_z b_z$
2. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$
3. $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = r^2 \cos\theta$
4. $t = |\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = r^2 \sin\theta$

3. 以上の条件を b_x, b_y, b_z に関する方程式として，計算する。

結果は，つぎのようになります：

$$\begin{aligned}
b_x =& (\cos\theta + q_x^2 - q_x^2 \cos\theta)\, a_x \\
&+ (q_x q_y - q_x q_y \cos\theta - q_z \sin\theta)\, a_y \\
&+ (q_x q_z - q_x q_z \cos\theta + q_y \sin\theta)\, a_z \\
b_y =& (\cos\theta + q_y^2 - q_y^2 \cos\theta)\, a_y \\
&+ (q_y q_z - q_y q_z \cos\theta - q_x \sin\theta)\, a_z \\
&+ (q_y q_x - q_y q_x \cos\theta + q_z \sin\theta)\, a_x \\
b_z =& (\cos\theta + q_z^2 - q_z^2 \cos\theta)\, a_z \\
&+ (q_z q_x - q_z q_x \cos\theta - q_y \sin\theta)\, a_x \\
&+ (q_z q_y - qz\, q_y \cos\theta + q_x \sin\theta)\, a_y
\end{aligned}$$

(計算のプロセス → 付録：§2.2「回転の計算」での計算省略部分)

註：ベクトル (x, y, z) と (X, Y, Z) に対する 外積 (x, y, z) × (X, Y, Z) は，つぎのベクトル：

1. (x, y, z) と (X, Y, Z) が張る平面に垂直
2. 向きは，これを回転軸にして (x, y, z) を (X, Y, Z) に重ねるときの右ねじの進む方向
3. 大きさは, (x, y, z) と (X, Y, Z) のなす角 θ に対し, |(x, y, z)| |(X, Y, Z)| $\sin\theta$

2.3　同値な回転

つぎの二つは，同じ回転の異なる表現です：

向き (q_x, q_y, q_z) の有向直線を回転軸として，θ 回転
向き $(-q_x, -q_y, -q_z)$ の有向直線を回転軸として，$-\theta$ 回転

2.4　２つのベクトルに対し一方を他方に移す回転・倍

0 ではなく，向きが互いに異なる任意の２つのベクトル **v**, **w** に対し，**w** を **v** に移す回転・倍が存在します。──以下が，これを求める方法です：

v, **w** を位置ベクトルとして考えます。

回転軸は，**v** と **w** で張られる平面に垂直で，原点を通る直線 L です。

L の直線の向き q は, **v** と **w** の外積 **v** × **w** を使って得られます:

$$q = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) / |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$$

回転角 θ は，**v** と w の内積 **v**・**w** に関するつぎの関係式から得られます：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{w}| \cos\theta$$

倍 t は，**v** と **w** の大きさの比です：

$$t = |\mathbf{w}| / |\mathbf{v}|$$

一方，**w** を **v** に移す回転・倍は，一意に決まりません──無限に存在します。
実際，ベクトル $r = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| + \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ とベクトル q が張る面の上にあって，原点を通る直線は，すべて **w** を **v** に重ねる回転の軸になります。──**w** を **v** に重ねる回転の角が，個々に異なります。

3.　＜２次元ベクトルの複素数倍＞の３次元拡張は？

3.0　要旨

四元数が導かれるもとになったのは，「３次元実ベクトルを量にするような数をつくる」という考えです。そして，「３次元実ベクトルを量とする数がつくることができる」とは，３次元実ベクトルに対する＜回転･倍＞の作用を数にできるということです。

しかし，これはできません。
本節では，このことを見ていきます。

3.1　３次元では回転･倍を「２量の比」として使えない

数の意義は，「２量の比」を表現することです。
「２量の比」の表現になることで，量の表現に使えます。
すなわち，任意の量を，つぎの形で一意的に表せるようになります：

「単位 (と決めた量) の何倍」

２次元実ベクトルは,「回転と倍」を数として，量になります。 ──「回転と倍」が「２量の比」の表現になります：

２つの２次元ベクトル **v**，**w** に対し，
v を **w** に移す「回転と倍」が一意的に決まる。

そして，複素数がこのときの数です。

３次元実ベクトルの場合，「回転」は「一つの有向直線を回転軸とする回転」ということになります。そしてこのときには，「回転･倍」は「２量の比」になりません。
実際，２つの３次元ベクトル **v**，**w** に対して，**v** を **w** に移す「回転･倍」は一意的に決まりません。(→ §2.4 ２つのベクトルに対し一方を他方に移す回転・倍)

3.2　３次元では回転･倍の和を定義できない

「回転・倍」の和の定義は，つぎのようになります：

二つの「回転･倍」α と β に対し, つぎの条件を満たす「回転･倍」γ を，α と β の和と定義する：

$$\mathbf{v}_{\times}\alpha + \mathbf{v}_{\times}\beta = \mathbf{v}_{\times}\gamma$$

（$\mathbf{v}$ は任意の３次元ベクトル，$_{\times}$ は「回転・倍」の作用）

したがって，この定義が可能となるためには，つぎのことが成り立っていなければなりません：

二つの「回転･倍」α と β に対し, つぎの条件を満たす「回転･倍」γ が，一意的に存在する：

$$\mathbf{v}_{\times}\alpha + \mathbf{v}_{\times}\beta = \mathbf{v}_{\times}\gamma$$

しかし, このことは成り立ちません。(→ §3.1 ３次元では回転･倍を「２量の比」として使えない)
したがって ,「回転・倍」の和は定義できません。

3.3　３次元では回転･倍は数にならない

２次元実ベクトルの回転と倍は，２次元実ベクトルを量とする数になりました──複素数がこのときの数です。

しかし３次元実ベクトルの「回転・倍」は，数になりません。
実際，３次元実ベクトルの「回転・倍」では，「２量の比」が成り立ちません。(→ §3.1 ３次元では回転・倍を「２量の比」として使えない)
特に，「回転・倍」の和を定義できません。(→ §3.2 ３次元では回転・倍の和を定義できない)

4.「３次元拡張」には４次元が必要

4.0　要旨

３次元実ベクトルに対する<回転・倍>の作用は，数にすることはできません。しかし，４次元実ベクトルに対する<回転・倍>の作用は，数にすることができます。
なぜ３次元ではうまくいかなくて，４次元ならうまくいくのか？

本節では，４次元でうまくいく理由を，４次元実ベクトルに対する<回転・倍>の作用を数にする方法とあわせて，解説します。

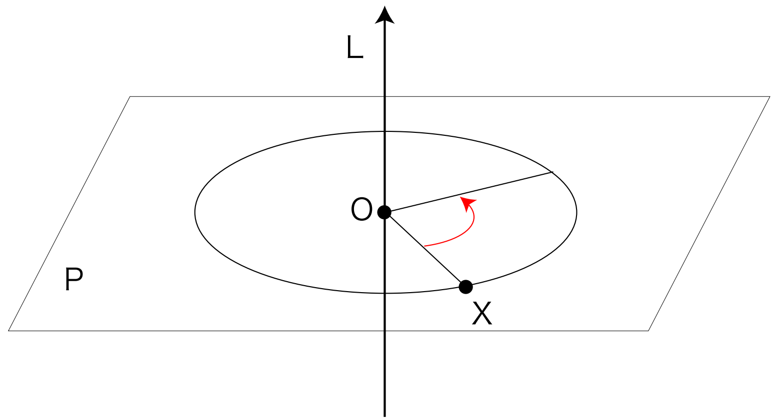
4.1　予備知識：「回転」とは？

量として考えているものの一つに，「回転の大きさ」があります。
「角度 (角の大きさ)」は，「回転の大きさ」のことばを使って定義されることになります。

この「回転の大きさ」を扱うためには, その前に「回転」の意味が定まっていなければなりません。すなわち, 何に対して何をすることを「回転」というのか？ということです。

ユークリッド空間の幾何学は，「回転」を，最終的につぎの形に還元します。

> ユークリッド空間Ｓの１点Ｏと，Ｏを含む有向直線Ｌと，Ｏを含みＬと垂直な超平面Ｐと，Ｐ上の点Ｘに対する，Ｏを回転の中心とするＰ上のＸの回転。



Ｘの回転は, Ｌに「正の方向」を定めていることにより,「右回りどれだけ」「左回りどれだけ」で表現されます。

ここで「超平面」ということばが出てきました。
これについて簡単に説明します。

３次元空間では，「空間」「平面」「直線」「点」があります。
２次元空間だと，「平面」「直線」「点」になります。
この調子を４次元でもやると，「全空間」「空間」「平面」「直線」「点」の５つになります。
５次元だと，「全空間」「４次元の空間」「空間」「平面」「直線」「点」の６つです。
この６つの表現に一貫性 / 連続性がないのは， ３次元空間 (わたしたちが「リアルな空間」ということにしているもの) で使っている「空間」「平面」「直線」「点」のことばに縛られているからです。

そこで，「超平面」ということばを使うことにします。
すなわち， リアルな空間として３次元空間で使ってきた「空間」「平面」「直線」「点」を， それぞれ「３次元の超平面」「２次元の超平面」「１次元の超平面」「０次元の超平面」と呼ぶようにします。

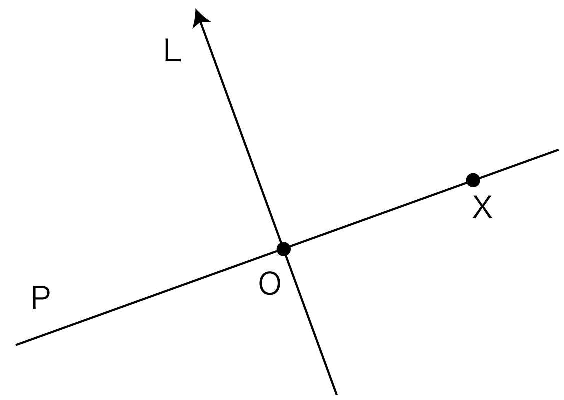
上の「回転」の定義に戻ると，

　　Ｓが２次元 (「平面」) だったら， Ｐは「直線」
　　Ｓが３次元 (「空間」) だったら， Ｐは「平面」
　　Ｓが４次元だったら， Ｐは「空間」

ということになります。

ここで，「アレ？！」と思いませんでしたか。

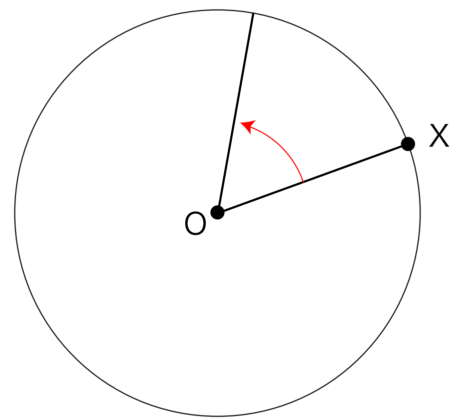
「平面Ｓでの，Ｏを回転の中心とする，Ｐ上の，Ｘの回転」とは，何でしょう？



これは，「Ｏを中心とするＰ上の対称点に移るか， そのままでいるか」の２通りの操作ということになります。
これが，「平面」における「回転」です。

このように言うと，つぎの反論がきっと出てくるでしょう：

　　平面における回転とはこういうもののはずだ！



しかし，この絵を見ているあなたの眼は，どこにありますか？
３次元空間の中にありますね。
上の回転を考えているときは，暗黙に３次元空間を使っています。
そして，Ｏを通って自分の眼Ｅに向かう有向直線を，暗黙に回転軸として使っているのです。

実際，点 O と点 X が描かれた透明な板があなたに手渡されて，「O を中心に，X を右回り (反時計回り) に 30゜ 回転せよ」と指示されたしましょう。
あなたは，右回り (反時計回り) を決められませんから，指示された操作をすることができません。

確認 : 平面に棲む者には，平面の裏・表を分けることはできません。
したがって，回転の向きを決められません。

4.2　２次元の回転・倍は，３次元で考えている

２次元ベクトルに対する「回転・倍」の作用は，つぎのような２次元ベクトル空間の変換 f として考えられています：

ゼロでないベクトル **v** を任意にとる。
v を (1, 0) とするように x-y 座標をとる。
f は，f(**v**) ＝ (a_x, a_y) で決まる。

「一つのベクトルの移動先が決まれば，すべてのベクトルの移動先が決まる」ということです。(これは，「作用」が「数」に昇格するための基本要件です。)

ここで，「**v** を (1, 0) とするように x-y 座標をとる」に注意しましょう。
「任意のベクトル **v** に対し，これを (1, 0) とする x-y 座標」が一意に決まらないと，「f は，f(**v**) ＝ (a_x, a_y) で決まる」のようにできません。
x 軸は一意に決まります。
y 軸はどうでしょう？

黒板に，x 軸を任意の傾きで書きます。すると，この x 軸に対して y 軸が決まります。すなわち，原点を中心にして，x 軸を時計の針と反対回り (左回り) に 90゜ 回転したのが，y 軸になります。

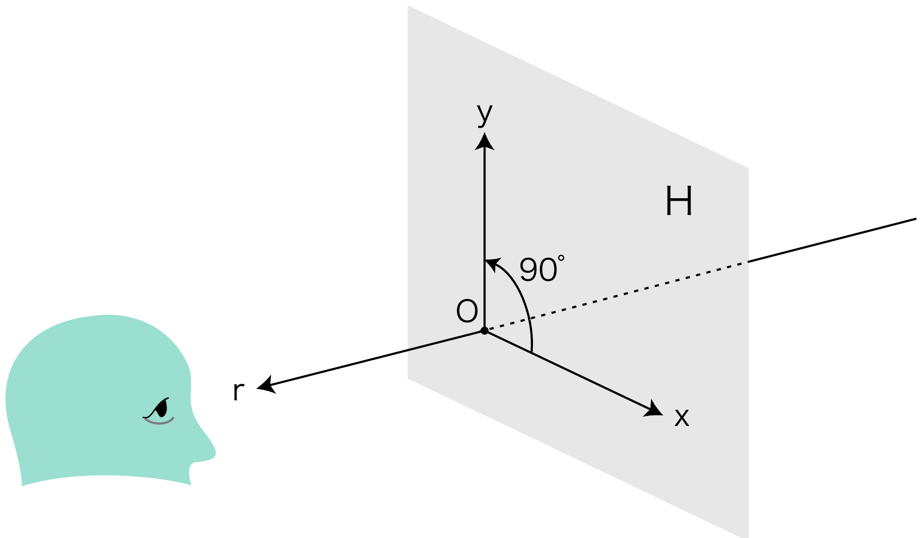
この操作は，３次元に棲むことで可能になっています！
２次元に棲んでいたら，x 軸に対する y 軸を決めることができません。

どういうこと？

「*時計の針と反対回り（左回り）*」は，黒板に正対するポジションをとることで言えることです。このポジションは, 黒板の「前と後ろ（表と裏）」を定めることのできるポジションです。２次元の中に棲む者は，「前と後ろ（表と裏）」を定めることができません。

以上のことを，もう少し数学的な表現を使って，まとめましょう。
２次元ベクトル空間の変換としての「回転・倍」は，つぎのように３次元で考えています：

1. ２次元ベクトル空間を，３次元ベクトル空間の中に２次元超平面 H として＜埋め込む＞。
2. H 上に原点 O をとる。
3. 原点を通り H に垂直に，r 軸をとる。
4. このとき, H 上に任意にとった x 軸に対し，r 軸, x 軸とあわさって直交座標系をつくる y 軸が，H の中で一意的に決まる。



＜埋め込み＞を数値的に扱えるように，別の言い方も示しておきます：

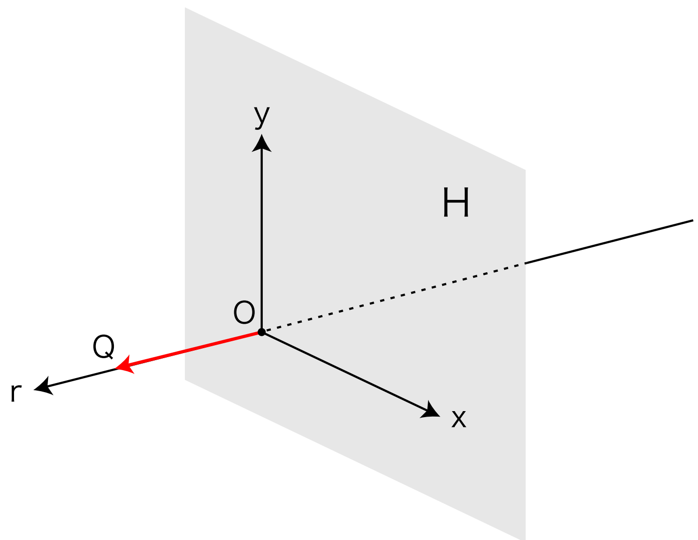
1. ３次元ベクトル空間で，ベクトル **q** をとる。

2. **q** を位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ で考えるとき，$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ となるベクトル $\overrightarrow{OP}$ 全体が，**q** に直交する２次元超平面を形成する。

   特に，直交座標系 r-x-y を「r 軸 の上に $\overrightarrow{OQ}$ がある」ようにとるとき，座標が（0, x, y）の形のベクトル $\overrightarrow{OP}$ 全体が，**q** に直交する２次元超平面である。

3. ２次元ベクトル空間を，つぎの要素対応により，この超平面と同一視する：

$$(x, y) \longleftrightarrow (0, x, y)$$



4.3　４次元の意義

２次元ベクトル空間の変換としての「回転・倍」は，３次元ベクトル空間で定めることができました。(→ §4.2　２次元の「回転・倍」は，３次元で考えている)
これとまったく同じことが，３次元ベクトル空間の変換としての「回転・倍」についても言えます。

３次元ベクトルに対する「回転・倍」の作用は，３次元ベクトル空間の変換 f として考えるものになります：

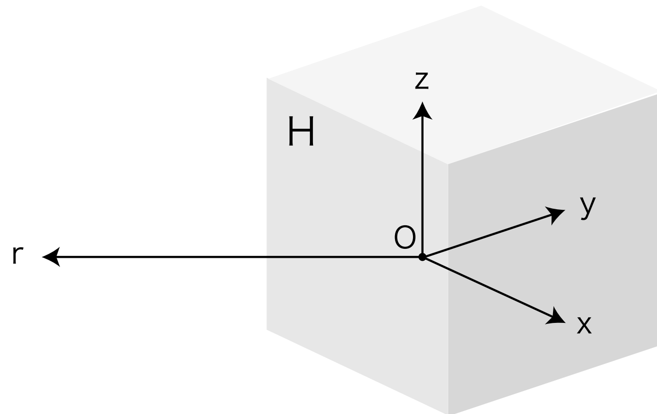
　ゼロでないベクトル **v** を任意にとる。
　v を (1, 0, 0) とするように x-y-z 座標をとる。
　f は，f(v) ＝ (a_x, a_y, a_z) で決まる。

「一つのベクトルの移動先が決まれば，すべてのベクトルの移動先が決まる」ということです。(これは，「作用」が「数」に昇格するための基本要件です。)

ここで,「**v** を (1, 0, 0) とするように x-y-z 座標をとる」に注意しましょう。
「任意のベクトル **v** に対し，これを (1, 0, 0) とする x-y-z 座標」が一意に決まらないと，「f は，f(**v**) ＝ (a_x, a_y, a_z) で決まる」のようにできません。
x 軸は一意に決まります。
しかし，この x 軸に対する y, z 軸が，一意に決まりません。

x 軸に対し y, z 軸が一意的に決まるようにはできないでしょうか？
３次元ベクトル空間を４次元ベクトル空間の中に３次元超平面として埋め込めば，これができます：

1. ３次元ベクトル空間を，４次元ベクトル空間の中に３次元超平面 H として埋め込む。
2. H 上に原点 O をとる。
3. 原点を通り H に垂直に，r 軸をとる。
4. このとき, H 上に任意にとった x 軸に対し，r 軸, x 軸とあわさって直交座標系をつくる y，z 軸が，H の中で一意に決まる。



２次元ベクトル空間は，３次元ベクトル空間につぎのように埋め込まれました：

1. ３次元ベクトル空間で，ベクトル **q** をとる。
2. 直交座標系 r-x-y を「r 軸 の上に $\overrightarrow{OQ}$ がある」ようにとるとき，座標が (0, x, y) の形のベクトル $\overrightarrow{OP}$ 全体が，**q** に直交する２次元超平面になる。
3. ２次元ベクトル空間を，つぎの要素対応により，この超平面と同

一視する：

$$(x, y) \longleftrightarrow (0, x, y)$$

これとまったく同じに，３次元ベクトル空間を４次元ベクトル空間に埋め込みます：

1. ４次元ベクトル空間で，ベクトル **q** をとる。
2. 直交座標系 r-x-y-z を「r 軸 の上に $\overrightarrow{OQ}$ がある」ようにとるとき，座標が（ 0, x, y, z ）の形のベクトル $\overrightarrow{OP}$ 全体が，**q** に直交する３次元超平面になる。
3. ３次元ベクトル空間を，つぎの要素対応により，この超平面と同一視する：

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (0, x, y, z)$$

4.4　３次元の回転・倍は，４次元で「数」にできる

$\overrightarrow{OQ}$ (| $\overrightarrow{OQ}$ | ＝ 1) を回転軸とする θ 回転 ($0 < \theta < \pi$) は，３次元ベクトル空間の変換を導きます。
すなわち，Q の座標を (q_x, q_y, q_z) とするとき，この変換は (a_x, a_y, a_z) につぎのように定まる (b_x, b_y, b_z) を対応させるものになります（→ §2.1 回転の計算）：

$$\begin{aligned}
b_x &= (\cos\theta + q_x^2 - q_x^2 \cos\theta) a_x \\
&\quad + (q_x q_y - q_x q_y \cos\theta - q_z \sin\theta) a_y \\
&\quad + (q_x q_z - q_x q_z \cos\theta + q_y \sin\theta) a_z \\
b_y &= (\cos\theta + q_y^2 - q_y^2 \cos\theta) a_y \\
&\quad + (q_y q_z - q_y q_z \cos\theta - q_x \sin\theta) a_z \\
&\quad + (q_y q_x - q_y q_x \cos\theta + q_z \sin\theta) a_x \\
b_z &= (\cos\theta + q_z^2 - q_z^2 \cos\theta) a_z \\
&\quad + (q_z q_x - q_z q_x \cos\theta - q_y \sin\theta) a_x \\
&\quad + (q_z q_y - q_z q_y \cos\theta + q_x \sin\theta) a_y
\end{aligned}$$

また，「倍」をこの回転と合わせることができます。

しかし，この「回転・倍」の作用は，３次元ベクトルを「量」とする「２量の比」としては使えません。なぜなら，任意の (a_x, a_y, a_z)，(b_x, b_y, b_z) に対し，(a_x, a_y, a_z) を (b_x, b_y, b_z) に移す「回転・倍」が一意に決まらないからです。
——実際, 可能な回転がいくつもあります。(→ §3.1「回転・倍」は「２量の比」の表現に使えない)

この「回転がいくつもある」という問題に対し，つぎのように考えてみます：

> ３次元ベクトル空間の回転を，４次元ベクトル空間の３次元超平面に埋め込む。 それは，４次元ベクトル空間のどのような変換 (「回転」) に拡張されるか？

このように考えてみようというのは，つぎの可能性が考えられるからです：

> 同じ大きさの (a_x, a_y, a_z)，(b_x, b_y, b_z) に対し，$(0, a_x, a_y, a_z)$ を $(0, b_x, b_y, b_z)$ に移す４次元ベクトル空間の「回転」が，一意に決まる。

そして，実際，一意に決まることになります。

すなわち，ここに「四元数」の登場となって，「回転」は (a_r, a_x, a_y, a_z) に対する (θ, q_x, q_y, q_z) のつぎの作用「$_{\mathrm{x}}$」になります：

$$(a_r, a_x, a_y, a_z) \,_{\mathrm{x}}\, (\theta, q_x, q_y, q_z) = (b_r, b_x, b_y, b_z)$$

$$\begin{aligned}
& b_r + b_x\, i + b_y\, j + b_z\, k \\
& = (\cos(\theta/2) \\
& \qquad + q_x \sin(\theta/2)\, i + q_y \sin(\theta/2)\, j + q_z \sin(\theta/2)\, k\,) \\
& \times (\, a_r + a_y\, j + ay\, j + a_z\, k\,) \\
& \times (\cos(-\theta/2) \\
& \qquad + q_x \sin(-\theta/2)\, i + q_y \sin(-\theta/2)\, j + q_z \sin(-\theta/2)\, k\,)
\end{aligned}$$

そしてこのとき，$(0, a_x, a_y, a_z)$ には $(0, b_x, b_y, b_z)$ が対応して，これは３次元ベクトル空間での回転になっています。 (→ §6.2 回転の計算に四元数が使える)

5.　４次元ベクトルの四元数倍

5.0　要旨

前節では，つぎのことを見てきました：

　４次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用は，
数にすることができる。——これが四元数。

本節では, 四元数と４次元実ベクトルの「数と量」の関係 (代数的構造) を，ごく簡単に整理します。

5.1　複素数の高次元拡張 → 四元数

四元数 ($\mathbb{H}$, ＋ , ×) は, 複素数の高次元拡張としてつくられたものです。(拡張したところから複素数を見れば，複素数は「二元数」。)

1. 和は：

$$(w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) + (w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$
$$= (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)\, i + (y_1 + y_2)\, j + (z_1 + z_2)\, k$$

2. 積は，つぎの規則によって計算される：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$(\Rightarrow ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ -ik = j\ )$$

すなわち，つぎのようになる：

$$(w + xi + yj + zk) \times (W + Xi + Yj + Zk)$$
$$= (wW - xX - yY - zZ)$$
$$+ (wX + xW + yZ - zY)\, i$$
$$+ (wY - xZ + yW + zX)\, j$$
$$+ (wZ + xY - yX + zW)\, k$$

5.2　四元数を「数」とする「量」

数の意義は，「２量の比」を表現することです。
「２量の比」の表現である数は，量の表現に使えます。
すなわち，任意の量を，つぎの形で一意的に表せるようになります：

「単位 (と決めた量) の何倍」

「単位 (と決めた量) の何倍の形で任意の量が表現できる」は，つぎのように言い換えられます：

「量は，数の倍作用に関して１次元」

例えば，２次元実ベクトル空間は，複素数の倍作用に関して１次元です。

「量は, 数の倍作用に関して１次元」には, つぎの重要な含意があります:

> 量は一つの形式であり，この形式は数を用いて表現される：
> 数 (N, ＋ , ×)　→　量 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

これは，つぎの解釈と通じています：

「量は，数を認識形式として人が対象化するところのもの」

確認：<長さ>は，「この棒の長さ」のように存在します。
棒に長さを読んで，これを一つの存在のようにしているのは，人です。

では, 四元数 ($\mathbb{H}$, ＋ , ×) に対応する「量」――すなわち, (($\mathbb{H}$, ＋), ×, ($\mathbb{H}$, ＋ , ×)) と同型な対象――は，どのようなものになるでしょう？

つぎのように定義される (($\mathbb{R}^4$, **＋**), ${}_\times$, ($\mathbb{H}$, ＋ , ×)) が,「量」(の一つ) になります：

1. (($\mathbb{R}^4$, **＋**), ${}_\times$, ($\mathbb{R}$, ＋ , ×)) は，４次元実ベクトル空間。

2. 同型：

$$((\mathbb{H}, +), \times, (\mathbb{H}, +, \times)) \rightarrow ((\mathbb{R}^4, \mathbf{+}), {}_\times, (\mathbb{H}, +, \times))$$

$$f:\ w + xi + tj + zk \longmapsto (w, x, y, z)$$

四元数の ＋ に４次元実ベクトルの **＋** が確かに対応しています：

$$\begin{aligned} & f(\ (w_1 + x_1\, i + y_1\, j + z_1\, k) + (w_2 + x_2\, i + y_2\, j + z_2\, k)\ ) \\ = & f(\ (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)\, i + (y_1 + y_2)\, j + (z_1 + z_2)\, k\ ) \\ = & (w_1 + w_2,\ \ x_1 + x_2,\ \ y_1 + y_2,\ \ z_1 + z_2\ ) \\ = & (w_1 + x_1 + y_1 + z_1\ ) \mathbf{+} (w_2 + x_2 + y_2 + z_2\ ) \end{aligned}$$

また，４次元実ベクトルに対する四元数の作用 ${}_\times$ が，つぎのように定義されたことになります：

$$\begin{aligned} & (w, x, y, z)\ {}_\times\ (W + Xi + Yj + Zk) \\ = & f(\ f^{-1}(w, x, y, z) \times (W + Xi + Yj + Zk)\ ) \\ = & f(\ (w + xi + yj + zk) \times (W + Xi + Yj + Zk)\ ) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(\,(wW - xX - yY - zZ)\\
&\qquad + (wX + xW + yZ - zY)\,i\\
&\qquad + (wY - xZ + yW + zX)\,j\\
&\qquad + (wZ + xY - yX + zW)\,k\,)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\,wW - xX - yY - zZ,\\
&\quad wX + xW + yZ - zY,\\
&\quad wY - xZ + yW + zX,\\
&\quad wZ + xY - yX + zW\,)
\end{aligned}
$$

5.3　代数的構造

四元数の代数的構造を論じることはこのテクストの趣旨ではありませんので，つぎの事実を述べるにとどめます：

積が，つぎのようになる：

結合法則を満たす。
<u>交換法則を満たさない。</u>
和に対し分配法則を満たす。
０でない四元数には，逆元が存在する。

四元数は，体になる。
(積の交換法則が成り立たないので，非可換体。)

自然数から複素数までの数の代数的構造と対比という点では，「交換法則を満たさない」ことが特徴になります。

6.　３次元ベクトルの回転・倍の計算に四元数が使える

6.0　要旨

四元数が導かれるもとになったのは，３次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用を数にするという考えです。
これはうまくいかず，４次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用を数にする結果となりました。

しかしこうして導かれた四元数は，自ずと，「３次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞の作用」を応用にもつことになります。
すなわち，３次元実ベクトルを４次元実ベクトルに埋め込むことで，３次元実ベクトルに対する＜回転・倍＞を四元数を使って計算できるようになります。

本節では，このことを解説します。

6.1　３次元ベクトルの四元数倍は？

２次元実ベクトルに対する複素数倍の拡張は，「３次元実ベクトルの倍」ではうまくいかず，「４次元実ベクトルの倍」になります。そして四元数がこのときの数になります。

ただし，複素数倍が「回転・倍」の作用であり，これの３次元への拡張を目論んだのが四元数の起こりでしたので，「３次元実ベクトルの回転・倍計算への四元数の応用性」の想いは依然残ります。

そこで，「３次元実ベクトルの四元数倍」がどのようなものになるか，ここでチェックしてみることにします。

四元数は４次元実ベクトルに対して倍作用します。そこで，３次元実ベクトル (x, y, z) を (0, x, y, z) の形で４次元実ベクトル空間に埋め込んで考えるというのが，自然な考え方になります。

しかしこの場合，３次元ベクトルの四元数倍は，３次元ベクトルの中におさまりません。
例えば，こんな具合です：

i	×	0	x	y	z			→	− x	0	− z	y
j	×	0	x	y	z			→	− y	z	0	− x
k	×	0	x	y	z			→	− z	− y	x	0
		0	x	y	z	×	i	→	− x	0	z	− y
		0	x	y	z	×	j	→	− y	− z	0	x
		0	x	y	z	×	k	→	− z	y	− x	0

しかし，この場合つぎのようにすると，３次元ベクトルの中におさまります：

i	×	0	x	y	z	×	− i	→	0	x	− y	− z
j	×	0	x	y	z	×	− j	→	0	− x	y	− z
k	×	0	x	y	z	×	− k	→	0	− x	− y	z

そこで，これをヒントに，つぎの積の展開パターンから，「３次元実ベクトルで閉じる四元数倍のパターン」を探ってみることにします：

$$(f_r + f_x i + f_y j + f_z k)$$
$$\times (a_x i + a_y j + a_z k)$$
$$\times (g_r + g_x i + g_y j + g_z k)$$

結論から言うと，つぎのパターンがここで求めるものになります：

$$(f_r + f_x i + f_y j + f_z k)$$
$$\times (a_x i + a_y j + a_z k)$$
$$\times (f_r - f_x i - f_y j - f_z k)$$

$$= ((f_r^2 + f_x^2 - f_y^2 - f_z^2) a_x$$
$$+ 2 (- f_r f_z + f_x f_y) a_y + 2 (f_r f_y + 2 f_x f_z) a_z) i$$

$$+ ((f_r^2 - f_x^2 + f_y^2 - f_z^2) a_y$$
$$+ 2 (- f_r f_x + f_y f_z) a_z + 2 (f_r f_z + f_x f_y) a_x) j$$

$$+ ((f_r^2 - f_x^2 - f_y^2 + f_z^2) a_z$$
$$+ 2 (- f_r f_y + f_x f_z) a_x + 2 (f_r f_x + f_y f_z) a_y) k$$

以下が，このゴールに至るプロセスです：

$$(f_r + f_x i + f_y j + f_z k)$$
$$\times (a_x i + a_y j + a_z k)$$
$$\times (g_r + g_x i + g_y j + g_z k)$$

$$= (- f_r g_x - f_x gr + f_y g_z - f_z g_y) a_x$$
$$+ (- f_r g_y - f_x g_z - f_y g_r + f_z g_x) a_y$$
$$+ (- f_r g_z + f_x g_y - f_y g_x - f_z g_r) a_z$$

$$+ (f_r g_r - f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) a_x$$
$$+ (f_r g_z - f_x g_y - f_y g_x - f_z g_r) a_y$$
$$+ (- f_r g_y - f_x g_z + f_y g_r - f_z g_x) a_z) i$$

$$+ ((- f_r g_z - f_x g_y - f_y g_x + f_z g_r) a_x$$
$$+ (f_r g_r + f_x g_x - f_y g_y + f_z g_z) a_y$$
$$+ (f_r g_x - f_x g_r - f_y g_z - f_z g_y) a_z) j$$

$$+ ((f_r g_y - f_x g_z - f_y g_r - f_z g_x) a_x$$
$$+ (- f_r g_x + f_x g_r - f_y g_z - f_z g_y) a_y$$
$$+ (f_r g_r + f_x g_x + f_y g_y - f_z g_z) a_z) k$$

(→ 付録:「３次元ベクトルの四元数倍は？」での計算省略部分 , 途中計算 1)

ここで，一般的に実部を 0 にするのは，つぎの場合 ($f_r + f_x i + f_y j + f_z k$ と $g_r + g_x i + g_y j + g_z k$ が「共役」の場合)：

$$f_r = g_r,\quad f_x = - g_x,\quad f_y = - g_y,\quad f_z = - g_z$$

そしてこのとき，

$$= ((f_r^2 + f_x^2 - f_y^2 - f_z^2)\, a_x + 2(-f_r f_z + f_x f_y)\, a_y + 2(f_r f_y + 2 f_x f_z)\, a_z)\, i$$

$$+ ((f_r^2 - f_x^2 + f_y^2 - f_z^2)\, a_y + 2(-f_r f_x + f_y f_z)\, a_z + 2(f_r f_z + f_x f_y)\, a_x)\, j$$

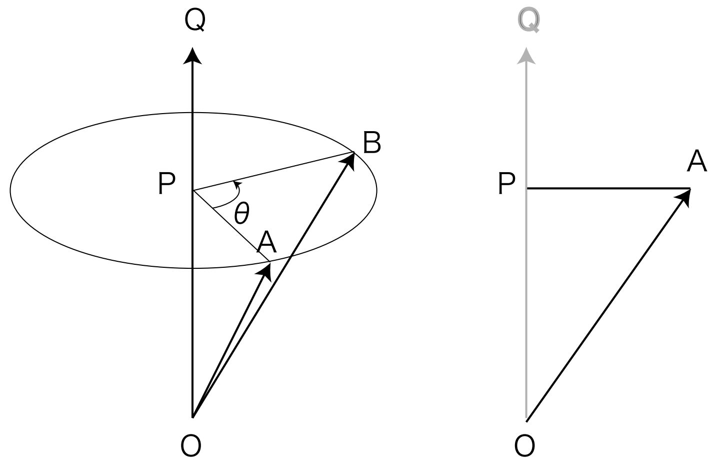
$$+ ((f_r^2 - f_x^2 - f_y^2 + f_z^2)\, a_z + 2(-f_r f_y + f_x f_z)\, a_x + 2(f_r f_x + f_y f_z)\, a_y)\, k$$

(→ 付録:「３次元ベクトルの四元数倍は？」での計算省略部分 ,
途中計算 2)

6.2　回転の計算に四元数が使える

３次元ベクトルの回転は，四元数を使って計算することができます。

$\overrightarrow{OQ}$ ($|\overrightarrow{OQ}| = 1$) を回転軸とする θ 回転で，A が B に移るとします。
また，A の回転面と の交点を P とします。



Q の座標 (q_x, q_y, q_z)，A の座標 (a_x, a_y, a_z)，角度 θ に対する B の座標 (bx, by, bz) は，つぎのようにして求められます：

$$M = \cos(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2)\, i + q_y \sin(\theta/2)\, j + q_z \sin(\theta/2)\, k$$

$$\overline{M} = \cos(-\theta/2) + q_x \sin(-\theta/2)\, i + q_y \sin(-\theta/2)\, j + q_z \sin(-\theta/2)\, k$$

とするとき，

$$M \times (a_x i + a_y j + a_z k) \times \overline{M} = b_x i + b_y j + b_z k$$

(→ 付録 :「回転の計算に四元数が使える」での計算省略部分)

6.2.1　例

$a = (a_x, a_y, a_z)$ に対する四元数

$$a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k$$

を A とする。

1.　$a = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OQ} = (1, 0, 0)$,　回転：$\pi$

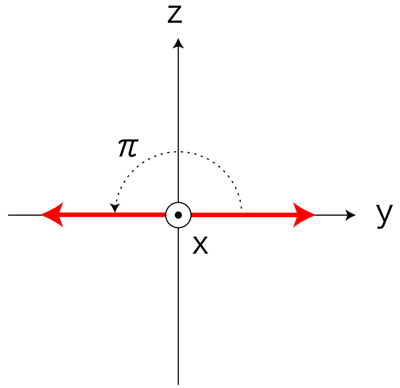
$M = i$

$\overline{M} = -i$

$M \times A \times \overline{M}$

$= i \times j \times (-i)$

$= -j$



2.　$a = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OQ} = (1, 0, 0)$,　回転：$\pi/2$

$M = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\, i$

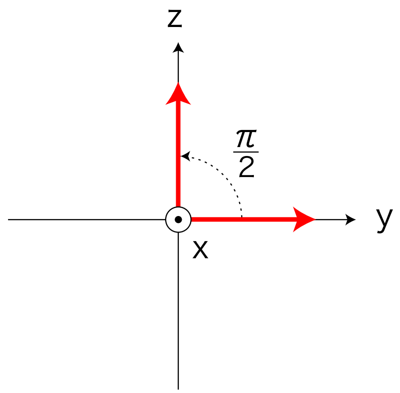
$\overline{M} = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\, i$

$M \times A \times \overline{M}$

$= (1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\, i) \times j$

$\times (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\, i)$

$= k$



3.　$a = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OQ} = (1, 0, 0)$,　回転：$\pi$

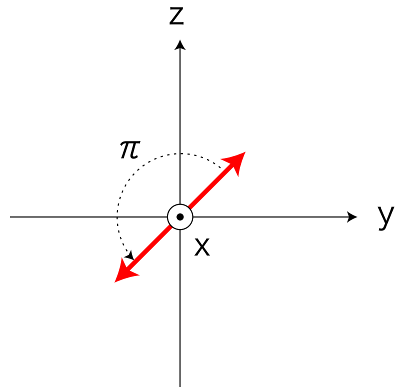
$M = i$

$\overline{M} = -i$

$M \times A \times \overline{M}$

$= i \times (i + j + k) \times (-i)$

$= i - j - k$



4.　$a = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OQ} = (1, 0, 0)$,　回転：$\pi/2$

$M = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\, i$

$\overline{M} = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\, i$

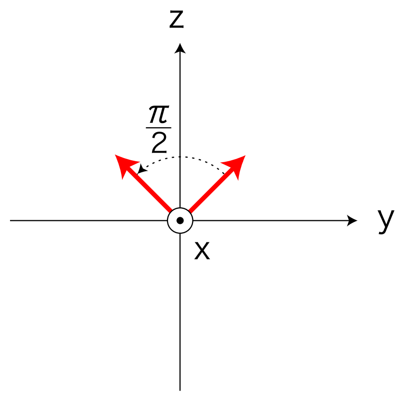
$M \times A \times \overline{M}$

$= (1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\, i)$

$\times (i + j + k)$

$\times (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\, i)$

$= i - j + k$



6.3　回転の合成は回転になる

回転は，ベクトル空間の変換（ベクトル空間のそれ自身の上の写像）になります。——原点を通り，向きが $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ の有向直線 L の回りの θ の回転は，つぎの写像になります（→ §6.2 回転の計算に四元数が使える）：

$$(v_x, v_y, v_z) \longmapsto (v'_x, v'_y, v'_z)$$

ただし，v'_x, v'_y, v'_z は，つぎの計算で求められる数：

$$M(\mathbf{q}, \theta) = \cos(\theta/2) + (q_x \sin(\theta/2))\, i + (q_y \sin(\theta/2))\, j + (q_z \sin(\theta/2))\, k$$

$$\overline{M}(\mathbf{q}, \theta) = \cos(-\theta/2) + (q_x \sin(-\theta/2))\, i + (q_y \sin(-\theta/2))\, j + (q_z \sin(-\theta/2))\, k$$

$$M(\mathbf{q}, \theta) \times (v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k) \times \overline{M}(q, \theta) = v'_x\, i + v'_y\, j + v'_z\, k$$

ここでつぎのことが問題になります：

二つの回転の合成は，また回転になるか？

答えは「Yes」です。（→ 付録：「回転の合成は回転になる」での計算省略部分）

6.3.1　例

例１. つぎの２つの回転を合成します：

1. 向き：(1, 0, 0)，回転：π
2. 向き：(0, 1, 0)，回転：π

そして，この結果がつぎの回転であるとしましょう：

3. 向き：(q_x, q_y, q_z)，回転：θ

この合成で (v_x, v_y, v_z) が移る先 (w_x, w_y, w_z) は，つぎの計算で求められます：

$$M((0, 1, 0), \pi) \times (M((1, 0, 0), \pi) \times (vx\, i + vy\, j + vz\, k) \times \overline{M}((1, 0, 0), \pi)) \times \overline{M}((0, 1, 0), \pi)) = wx\, i + wy\, j + wz\, k$$

このとき，

$$M((q_x, q_y, q_z), \theta) = M((0, 1, 0), \pi) \times (M((1, 0, 0), \pi)$$

すなわち，

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta/2) + (q_x \sin(\theta/2))\, i + (q_y \sin(\theta/2))\, j + (q_z \sin(\theta/2))\, k \\
&= (\cos(\pi/2) + (0 \times \sin(\pi/2))\, i + (1 \times \sin(\pi/2))\, j + (0 \times \sin(\pi/2))\, k) \\
&\times (\cos(\pi/2) + (1 \times \sin(\pi/2))\, i + (0 \times \sin(\pi/2))\, j + (0 \times \sin(\pi/2))\, k) \\
&= j \times i = -k
\end{aligned}$$

そしてこれより，

$$\cos(\theta/2) = 0$$
$$q_x \sin(\theta/2) = 0$$
$$q_y \sin(\theta/2) = 0$$
$$q_z \sin(\theta/2) = -1$$

$\cos(\theta/2) = 0$ より $\theta/2 = \pm\pi/2$, さらに

$\sin(\theta/2) = 1,\quad q_x = 0,\quad q_y = 0,\quad q_z = -1$
または
$\sin(\theta/2) = -1,\quad q_x = 0,\quad q_y = 0,\quad q_z = 1$

地球儀などを使って，この回転が求めるものになっていることを実際に確認してみてください。

例２. つぎの２つの回転を合成します：

1. 向き：$(1, 0, 0)$，回転：$\pi/3$
2. 向き：$(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$，回転：$\pi/3$

そして，この結果がつぎの回転であるとしましょう：

3. 向き：(q_x, q_y, q_z)，回転：θ

この合成で (v_x, v_y, v_z) が移る先 (w_x, w_y, w_z) は，つぎの計算で求められます：

$$M((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \pi/3) \times (\, M((1, 0, 0), \pi/3)$$
$$\times (v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k)$$
$$\times \overline{M}((1, 0, 0), \pi/3)\,) \times \overline{M}((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \pi/3)\,)$$
$$= w_x\, i + w_y\, j + w_z\, k$$

このとき，

$$M((q_x, q_y, q_z), \theta)$$
$$= M((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \pi/3) \times M((1, 0, 0), \pi/3)$$

すなわち，

$$\cos(\theta/2) + (q_x \sin(\theta/2))\, i + (q_y \sin(\theta/2))\, j + (q_z \sin(\theta/2))\, k$$
$$= (\cos(\pi/6)$$
$$+ (0 \times \sin(\pi/6))\, i + (1/\sqrt{2} \times \sin(\pi/6))\, j + (1/\sqrt{2} \times \sin(\pi/6))\, k)$$
$$\times (\cos(\pi/6)$$
$$+ (1 \times \sin(\pi/6))\, i + (0 \times \sin(\pi/6))\, j + (0 \times \sin(\pi/6))\, k)$$
$$= (\sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/4\, j + \sqrt{2}/4\, k) \times (\sqrt{3}/2 + 1/2\, i)$$

そしてこれより，

$$\cos(\theta/2) = 3/4$$
$$q_x \sin(\theta/2) = \sqrt{3}/4$$
$$q_y \sin(\theta/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/8$$
$$qz \sin(\theta/2) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/8$$

$\cos(\theta/2) = 3/4$ より，

$\sin(\theta/2) = \sqrt{7}/4$,
$q_x = \sqrt{3}/\sqrt{7},\quad q_y = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/(2\sqrt{7}),\quad q_z = -(\sqrt{6} - \sqrt{2})/(2\sqrt{7})$
または
$\sin(\theta/2) = -\sqrt{7}/4$,
$q_x = -\sqrt{3}/\sqrt{7},\quad q_y = -(\sqrt{6} + \sqrt{2})/(2\sqrt{7}),\quad q_z = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/(2\sqrt{7})$

この数値は，つぎの関係を確かに満たしています：

$$q_x2 + q_y2 + q_z = 1$$

おわりに

「数」の意味は，端的に「量の比」ということになります。
「数」は，「量の比」として使えるようにつくられます。

本論考は，このことを見るのが目的で「四元数」を取り上げたものです。すなわち，「数」の構成の一環として，「数」の意味が貫徹されているものの一つとして，四元数を取り上げること――これが目的でした。

したがって，「四元数」を標題に含む数学・工学の類書の内容とはかなり趣を異にしています。
実際，この論考は数学教育の立場――つぎのように考える立場――からつくられたものです：

> 「数」を理解する上で，四元数の知識はひじょうに役に立つ。
> 特に，学習する意義がある。

付録

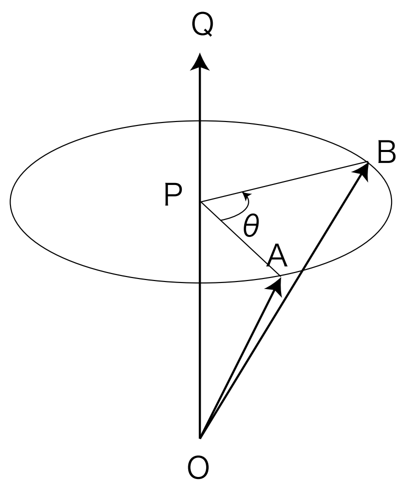
§ 2.2「回転の計算」での計算省略部分

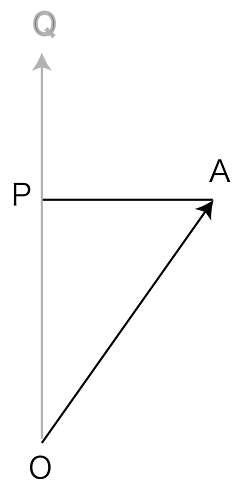
§ 6.1 「３次元ベクトルの四元数倍は？」
での計算省略部分

§ 6.2「回転の計算に四元数が使える」
での計算省略部分

§ 6.3「回転の合成は回転になる」
での計算省略部分

§2.2「回転の計算」での計算省略部分





P は，つぎの条件で定まる：

$$\overrightarrow{OP} = k\,\overrightarrow{OQ}$$
$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$$

そしてこの条件より：

$$0 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OQ} \cdot \ (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} \cdot \ (\overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OQ})$$
$$= \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} - k\,|\overrightarrow{OQ}|^2 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} - k$$

よって，

$$k = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z$$

$|\overrightarrow{PA}| = r$ に対し：

$$r^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OP}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 - k^2$$

B は，つぎの条件で定まる：

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$
$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$$
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}|\ |\overrightarrow{PB}| \cos\theta = r^2 \cos\theta$$
$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = t\,\overrightarrow{OQ} \quad (t > 0)$$

そしてこの条件より：

$$0 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \ (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} \cdot \ (\overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OQ})$$
$$= \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} - k\,|\overrightarrow{OQ}|^2 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} - k$$

よって，

$$k = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} = q_x b_x + q_y b_y + q_z b_z$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}|\ |\overrightarrow{PB}| \cos\theta = r^2 \cos\theta$ では，

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$$
$$= (\overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OQ}) \cdot (\overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OQ})$$
$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} - k\,\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} + k^2\,\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ}$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - k^2 - k^2 + k^2$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - k^2$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - (a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 - r^2)$$

よって，

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 - r^2 + r^2 \cos\theta$$

$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \times (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$$
$$= (\overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OQ}) \times (\overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OQ})$$
$$= \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OQ} + k^2\,\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OQ}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_y b_z - a_z b_y,\quad a_z b_x - a_x b_z,\quad a_x b_y - a_y b_x) \\
&- k\,(q_y b_z - q_z b_y,\quad q_z b_x - q_x b_z,\quad q_x b_y - q_y b_x) \\
&- k\,(a_y q_z - a_z q_y,\quad a_z q_x - a_x q_z,\quad a_x q_y - a_y q_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= (&a_y b_z - a_z b_y - k\,q_y b_z + k\,q_z b_y - k\,a_y q_z + k\,a_z q_y, \\
&a_z b_x - a_x b_z - k\,q_z b_x + k\,q_x b_z - k\,a_z q_x + k\,a_x q_z, \\
&a_x b_y - a_y b_x - k\,q_x b_y + k\,q_y b_x - k\,a_x q_y + k\,a_y q_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= (\,&(a_y - k\,q_y)\,b_z - (a_z - k\,q_z)\,b_y - k\,a_y q_z + k\,a_z q_y, \\
&(a_z - k\,q_z)\,b_x - (a_x - k\,q_x)\,b_z - k\,q_x a_z + k\,q_z, a_x \\
&(a_x - k\,q_x)\,b_y - (a_y - k\,q_y)\,b_x - k\,q_y a_x + k\,q_x)\,a_y
\end{aligned}$$

$$t = |\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PB}| \sin\theta = r^2 \sin\theta$$

よって, $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = t\,\overrightarrow{OQ}$ は, つぎのようになる：

$$(a_y - k\,q_y)\,b_z - (a_z - k\,q_z)\,b_y = k\,q_z a_y - k\,q_y a_z + r^2 q_x \sin\theta$$
$$(a_z - k\,q_z)\,b_x - (a_x - k\,q_x)\,b_z = k\,q_x a_z - k\,q_z a_x + r^2 q_y \sin\theta$$
$$(a_x - k\,q_x)\,b_y - (a_y - k\,q_y)\,b_x = k\,q_y a_x - k\,q_x a_y + r^2 q_z \sin\theta$$

以上をまとめて：

(1) $k = q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z = q_x b_x + q_y b_y + q_z b_z$

(2) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2} - r^2 + r^2 \cos\theta$

(3) $(a_y - k\,q_y)\,b_z - (a_z - k\,q_z)\,b_y = k\,q_z a_y - k\,q_y a_z + r^2 q_x \sin\theta$

(4) $(a_z - k\,q_z)\,b_x - (a_x - k\,q_x)\,b_z = k\,q_x a_z - k\,q_z a_x + r^2 q_y \sin\theta$

(5) $(a_x - k\,q_x)\,b_y - (a_y - k\,q_y)\,b_x = k\,q_y a_x - k\,q_x a_y + r^2 q_z \sin\theta$

(2), (4), (5) より, b_x が得られる：

(5) の b_y, (4) の b_z を (2) に代入：

$$\begin{aligned}
&a_x b_x \\
&+ a_y\,((a_y - k\,q_y)\,b_x + k\,q_y a_x - k\,q_x a_y + r^2 q_z \sin\theta\,) \,/\, (a_x - k\,q_x) \\
&+ a_z\,((a_z - k\,q_z)\,b_x - k\,q_x a_z + k\,q_z a_x - r^2 q_y \sin\theta\,) \,/\, (a_x - k\,q_x) \\
&= a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2} - r^2 + r^2 \cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ &(\,a_x\,(a_x - k\,q_x) + a_y\,(a_y - k\,q_y) + a_z\,(a_z - k\,q_z)\,)\,b_x \\
&+ a_y\,(\,k\,q_y a_x - k\,q_x a_y + r^2 q_z \sin\theta\,) \\
&+ a_z\,(\,-k\,q_x a_z + k\,q_z a_x - r^2 q_y \sin\theta\,) \\
&= (a_x - k\,q_x)\,(\,a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2} - r^2 + r^2 \cos\theta\,)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (a_x^2 - k q_x a_x + a_y^2 - k q_y a_y + a_z^2 - k q_z a_z)\, b_x$$

$$\begin{aligned}
&= -(k q_y a_x a_y - k q_x a_y^2 + r^2 q_z a_y \sin\theta) \\
&\quad -(-k q_x a_z^2 + k q_z a_z a_x - r^2 q_y a_z \sin\theta) \\
&\quad +(a_x a_x^2 + a_x a_y^2 + a_x a_z^2 - r^2 a_x + r^2 a_x \cos\theta) \\
&\quad -k(q_x a_x^2 + q_x a_y^2 + q_x a_z^2 - r^2 q_x + r^2 q_x \cos\theta)
\end{aligned}$$

左辺

$$\begin{aligned}
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - k(q_x a_x + q_y a_y + q_z)\, a_z)\, b_x \\
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - k^2)\, b_x \\
&= r^2 b_x
\end{aligned}$$

右辺

$$\begin{aligned}
&= -(k q_y a_x a_y - k q_x a_y^2 + q_z r^2 a_y \sin\theta) \\
&\quad -(-k q_x a_z^2 + k q_z a_z a_x - r^2 q_y a_z \sin\theta) \\
&\quad +(a_x a_x^2 + a_x a_y^2 + a_x a_z^2 - r^2 a_x + r^2 a_x \cos\theta) \\
&\quad -k(q_x a_x^2 + q_x a_y^2 + q_x a_z^2 - r^2 q_x + r^2 q_x \cos\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -k q_y a_x a_y + k q_x a_y^2 - r^2 q_z a_y \sin\theta \\
&\quad + k q_x a_z^2 - k q_z a_z a_x + r^2 q_y a_z \sin\theta \\
&\quad + a_x a_x^2 + a_x a_y^2 + a_x a_z^2 - r^2 a_x + r^2 a_x \cos\theta \\
&\quad - k q_x a_x^2 - k q_x a_y^2 - k q_x a_z^2 + k r^2 q_x - k r^2 q_x \cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= + a_x a_x^2 + a_x a_y^2 + a_x a_z^2 - k q_x a_x^2 - k q_y a_x a_y - k q_z a_z a_x - r^2 a_x \\
&\quad - r^2 q_z a_y \sin\theta + r^2 q_y a_z \sin\theta + r^2 a_x \cos\theta + k r^2 q_x - k r^2 q_x \cos\theta \\
&\quad + k q_x a_y^2 - k q_x a_y^2 + k q_x a_z^2 - k q_x a_z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - k(q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z))\, a_x - r^2 a_x \\
&\quad + r^2(-q_z a_y \sin\theta + q_y a_z \sin\theta + a_x \cos\theta + k q_x - k q_x \cos\theta)
\end{aligned}$$

よって,

$$b_x = -q_z a_y \sin\theta + q_y a_z \sin\theta + a_x \cos\theta + k q_x - k q_x \cos\theta$$

$$\begin{aligned}
&= -q_z a_y \sin\theta + q_y a_z \sin\theta + a_x \cos\theta \\
&\quad + (q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z)\, q_x - (q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z)\, q_x \cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos\theta + q_x^2 - q_x^2 \cos\theta)\, a_x \\
&\quad + (+q_x q_y - q_y q_x \cos\theta - q_z \sin\theta)\, a_y \\
&\quad + (q_x q_z - q_z q_x \cos\theta + q_y \sin\theta)\, a_z
\end{aligned}$$

同様にして，(2), (3), (5) から b_y， (2), (3), (4) から b_zが，それぞれ得られる：

$$\begin{aligned}
b_y &= (\cos\theta + q_y^2 - q_y^2 \cos\theta)\, a_y \\
&\quad + (q_y q_z - q_y q_z \cos\theta - q_x \sin\theta)\, a_z \\
&\quad + (q_y q_x - q_y q_x \cos\theta + q_z \sin\theta)\, a_x \\
b_z &= (\cos\theta + q_z^2 - q_z^2 \cos\theta)\, a_z \\
&\quad + (q_z q_x - q_z q_x \cos\theta - q_y \sin\theta)\, a_x \\
&\quad + (q_z q_y - q_z q_y \cos\theta + q_x \sin\theta)\, a_y
\end{aligned}$$

§ 6.1「３次元ベクトルの四元数倍は？」での計算省略部分

途中計算１：

$$
\begin{aligned}
&(f_r + f_x i + f_y j + f_z k) \\
&\quad \times (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad \times (g_r + g_x i + g_y j + g_z k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\, f_r (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad) (g_r + g_x i + g_y j + g_z k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\, f_r (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad) g_r \\
&+ (\, f_r (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad) g_x i \\
&+ (\, f_r (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad) g_y j \\
&+ (\, f_r (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\quad) g_z k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_r (a_x i + a_y j + a_z k) g_r \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) g_r \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) g_r \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) g_r \\
\\
&+ f_r (a_x i + a_y j + a_z k) g_x i \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) g_x i \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) g_x i \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) g_x i \\
\\
&+ f_r (a_x i + a_y j + a_z k) g_y j \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) g_y j \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) g_y j \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) g_y j \\
\\
&+ f_r (a_x i + a_y j + a_z k) g_z k \\
&+ f_x i (a_x i + a_y j + a_z k) g_z k \\
&+ f_y j (a_x i + a_y j + a_z k) g_z k \\
&+ f_z k (a_x i + a_y j + a_z k) g_z k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_r (\, a_x i + a_y j + a_z k\,) g_r \\
&+ f_x (\, a_x i i + a_y i j + a_z i k\,) g_r \\
&+ f_y (\, a_x j i + a_y j j + a_z j k\,) g_r \\
&+ f_z (\, a_x k i + a_y k j + a_z k k\,) g_r \\
\\
&+ f_r (\, a_x i i + a_y j i + a_z k i\,) g_x \\
&+ f_x (\, a_x i i i + a_y i j i + a_z i k i\,) g_x \\
&+ f_y (\, a_x j i i + a_y j j i + a_z j k i\,) g_x \\
&+ f_z (\, a_x k i i + a_y k j i + a_z k k i\,) g_x \\
\\
&+ f_r (\, a_x i j + a_y j j + a_z k j\,) g_y \\
&+ f_x (\, a_x i i j + a_y i j j + a_z i k j\,) g_y \\
&+ f_y (\, a_x j i j + a_y j j j + a_z j k j\,) g_y \\
&+ f_z (\, a_x k i j + a_y k j j + a_z k k j\,) g_y \\
\\
&+ f_r (\, a_x i k + a_y j k + a_z k k\,) g_z \\
&+ f_x (\, a_x i i k + a_y i j k + a_z i k k\,) g_z \\
&+ f_y (\, a_x j i k + a_y j j k + a_z j k k\,) g_z \\
&+ f_z (\, a_x k i k + a_y k j k + a_z k k k\,) g_z
\end{aligned}
$$

$$= f_r (a_x i + a_y j + a_z k) g_r$$
$$+ f_x (- a_x + a_y k - a_z j) g_r$$
$$+ f_y (- a_x k - a_y + a_z i) g_r$$
$$+ f_z (+ a_x j - a_y i - a_z) g_r$$

$$+ f_r (- a_x - a_y k + a_z j) g_x$$
$$+ f_x (- a_x i + a_y j + a_z k) g_x$$
$$+ f_y (- a_x j - a_y i - a_z) g_x$$
$$+ f_z (- a_x k + a_y - a_z i) g_x$$

$$+ f_r (a_x k - a_y - a_z i) g_y$$
$$+ f_x (- a_x j - a_y i + a_z) g_y$$
$$+ f_y (a_x i - a_y j + a_z k) g_y$$
$$+ f_z (- a_x - a_y k - a_z j) g_y$$

$$+ f_r (- a_x j + a_y i - a_z) g_z$$
$$+ f_x (- a_x k - a_y - a_z i) g_z$$
$$+ f_y (a_x - a_y k - a_z j) g_z$$
$$+ f_z (a_x i + a_y j - a_z k) g_z$$

$$= f_r a_x g_r i + f_r a_y g_r j + f_r a_z g_r k$$
$$- f_x a_x g_r + f_x a_y g_r k - f_x a_z g_r j$$
$$- f_y a_x g_r k - f_y a_y g_r + f_y a_z g_r i$$
$$+ f_z a_x g_r j - f_z a_y g_r i - f_z a_z g_r$$

$$- f_r a_x g_x - f_r a_y g_x k + f_r a_z g_x j$$
$$- f_x a_x g_x i + f_x a_y g_x j + f_x a_z g_x k$$
$$- f_y a_x g_x j - f_y a_y g_x i - f_y a_z g_x$$
$$- f_z a_x g_x k + f_z a_y g_x - f_z a_z g_x i$$

$$+ f_r a_x g_y k - f_r a_y g_y - f_r a_z g_y i$$
$$- f_x a_x g_y j - f_x a_y g_y i + f_x a_z g_y$$
$$+ f_y a_x g_y i - f_y a_y g_y j + f_y a_z g_y k$$
$$- f_z a_x g_y - f_z a_y g_y k - f_z a_z g_y j$$

$$- f_r a_x g_z j + f_r a_y g_z i \quad f_r a_z g_z$$
$$- f_x a_x g_z k - f_x a_y g_z \quad f_x a_z g_z i$$
$$+ f_y a_x g_z - f_y a_y g_z k \quad f_y a_z g_z j$$
$$+ f_z a_x g_z i + f_z a_y g_z j \quad f_z a_z g_z k$$

$$= - f_x a_x g_r - f_y a_y g_r - f_z a_z g_r$$
$$- f_r a_x g_x - f_y a_z g_x + f_z a_y g_x$$
$$- f_r a_y g_y + f_x a_z g_y - f_z a_x g_y$$
$$- f_r a_z g_z - f_x a_y g_z + f_y a_x g_z$$

$$(+ f_r a_x g_r + f_y a_z g_r - f_z a_y g_r$$
$$- f_x a_x g_x - f_y a_y g_x - f_z a_z g_x$$
$$- f_r a_z g_y - f_x a_y g_y + f_y a_x g_y$$
$$+ f_r a_y g_z - f_x a_z g_z + f_z a_x g_z) i$$

$$+ (f_r a_y g_r - f_x a_z g_r + f_z a_x g_r$$
$$+ f_r a_z g_x + f_x a_y g_x - f_y a_x g_x$$
$$- f_x a_x g_y - f_y a_y g_y - f_z a_z g_y$$
$$- f_r a_x g_z - f_y a_z g_z + f_z a_y g_z) j$$

$$+ (f_r a_z g_r + f_x a_y g_r - f_y a_x g_r$$
$$- f_r a_y g_x + f_x a_z g_x - f_z a_x g_x$$
$$+ f_r a_x g_y + f_y a_z g_y - f_z a_y g_y$$
$$- f_x a_x g_z - f_y a_y g_z - f_z a_z g_z) k$$

$$= - f_r a_x g_x - f_x a_x g_r + f_y a_x g_z - f_z a_x g_y$$
$$- f_r a_y g_y - f_x a_y g_z - f_y a_y g_r + f_z a_y g_x$$
$$- f_r a_z g_z + f_x a_z g_y - f_y a_z g_x - f_z a_z g_r$$

$$(+ f_r a_x g_r - f_x a_x g_x + f_y a_x g_y + f_z a_x g_z$$
$$+ f_r a_y g_z - f_x a_y g_y - f_y a_y g_x - f_z a_y g_r$$
$$- f_r a_z g_y - f_x a_z g_z + f_y a_z g_r - f_z a_z g_x) i$$

$$- f_r a_x g_z - f_x a_x g_y - f_y a_x g_x + (f_z a_x g_r$$
$$f_r a_y g_r + f_x a_y g_x - f_y a_y g_y + f_z a_y g_z$$
$$+ f_r a_z g_x - f_x a_z g_r - f_y a_z g_z - f_z a_z g_y) j$$

$$+ (+ f_r a_x g_y - f_x a_x g_z - f_y a_x g_r - f_z a_x g_x$$
$$- f_r a_y g_x + f_x a_y g_r - f_y a_y g_z - f_z a_y g_y$$
$$+ f_r a_z g_r + f_x a_z g_x + f_y a_z g_y - f_z a_z g_z) k$$

$$
\begin{aligned}
&= (- f_r g_x - f_x g_r + f_y g_z - f_z g_y) a_x \\
&+ (- f_r g_y - f_x g_z - f_y g_r + f_z g_x) a_y \\
&+ (- f_r g_z + f_x g_y - f_y g_x - f_z g_r) a_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (f_r g_r - f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) a_x \\
&+ (f_r g_z - f_x g_y - f_y g_x - f_z g_r) a_y \\
&+ (- f_r g_y - f_x g_z + f_y g_r - f_z g_x) a_z) i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ ((- f_r g_z - f_x g_y - f_y g_x + f_z g_r) a_x \\
&+ (f_r g_r + f_x g_x - f_y g_y + f_z g_z) a_y \\
&+ (f_r g_x - f_x g_r - f_y g_z - f_z g_y) a_z) j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ ((f_r g_y - f_x g_z - f_y g_r - f_z g_x) a_x \\
&+ (- f_r g_x + f_x g_r - f_y g_z - f_z g_y) a_y \\
&+ (f_r g_r + f_x g_x + f_y g_y - f_z g_z) a_z) k
\end{aligned}
$$

途中計算２：

$$
\begin{aligned}
&= (- f_r (- f_x) - f_x f_r + f_y (- f_z) - f_z (- f_y)) a_x \\
&+ (- f_r (- f_y) - f_x (- f_z) - f_y f_r + f_z (- f_x)) a_y \\
&+ (- f_r (- f_z) + f_x (- f_y) - f_y (- f_x) - f_z f_r) a_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ ((f_r f_r - f_x (- f_x) + f_y (- f_y) + f_z (- f_z)) a_x \\
&+ (f_r (- f_z) - f_x (- f_y) - f_y (- f_x) - f_z f_r) a_y \\
&+ (- f_r (- f_y) - f_x (- f_z) + f_y f_r - f_z (- f_x)) a_z) i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (- f_r (- f_z) - f_x (- f_y) - f_y (- f_x) + f_z f_r) a_x \\
&+ (f_r f_r + f_x (- f_x) - f_y (- f_y) + f_z (- f_z)) a_y \\
&+ (f_r (- f_x) - f_x f_r - f_y (- f_z) - f_z (- f_y)) a_z) j
\end{aligned}
$$

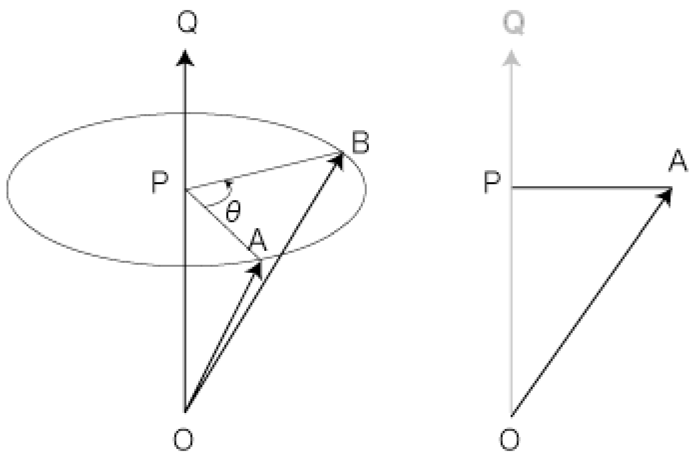
$$
\begin{aligned}
&+ ((f_r (- f_y) - f_x (- f_z) - f_y f_r - f_z (- f_x)) a_x \\
&(- f_r (- f_x) + f_x f_r - f_y (- f_z) - f_z (- f_y)) a_y \\
&+ (f_r f_r + f_x (- f_x) + f_y (- f_y) - f_z (- f_z)) a_z) k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ((f_r^2 + f_x^2 - f_y^2 - f_z^2) a_x \\
&+ 2 (- f_r f_z + f_x f_y) a_y \\
&+ 2 (f_r f_y + f_x f_z) a_z) i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2 (f_r f_z + f_x f_y) a_x \\
&+ (f_r^2 - f_x^2 + f_y^2 - f_z^2) a_y \\
&+ 2 (- f_r f_x + f_y f_z) a_z) j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2 (- f_r f_y + f_x f_z) a_x \\
&+ 2 (f_r f_x + 2 f_y f_z) a_y \\
&+ (f_r^2 - f_x^2 - f_y^2 + f_z^2) a_z) k
\end{aligned}
$$

§6.2「回転の計算に四元数が使える」での計算省略部分



Q の座標 (q_x, q_y, q_z)，A の座標 (a_x, a_y, a_z)，角度 θ に対する B の座標 (b_x, b_y, b_z) は，直接計算して，つぎのようになりました (§2.2 回転の計算)：

$$
\begin{aligned}
b_x = & (\cos\theta + q_x^2 - q_x^2 \cos\theta) a_x \\
& + (q_x q_y - q_x q_y \cos\theta - q_z \sin\theta) a_y \\
& + (q_x q_z - q_x q_z \cos\theta + q_y \sin\theta) a_z \\
b_y = & (\cos\theta + q_y^2 - q_y^2 \cos\theta) a_y \\
& + (q_y q_z - q_y q_z \cos\theta - q_x \sin\theta) a_z \\
& + (q_y q_x - q_y q_x \cos\theta + q_z \sin\theta) a_x \\
b_z = & (\cos\theta + q_z^2 - q_z^2 \cos\theta) a_z \\
& + (q_z q_x - q_z q_x \cos\theta - q_y \sin\theta) a_x \\
& + (q_z q_y - q_z q_y \cos\theta + q_x \sin\theta) a_y
\end{aligned}
$$

これを，つぎのように変形します：

$$
\begin{aligned}
b_x = & (\cos\theta + q_x^2 - q_x^2 \cos\theta) a_x \\
& + (q_x q_y - q_x q_y \cos\theta - q_z \sin\theta) a_y \\
& + (q_x q_z - q_x q_z \cos\theta + q_y \sin\theta) a_z \\
\\
= & (\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) + q_x^2 - q_x^2 (1 - 2 \sin^2(\theta/2))) a_x \\
& + (q_x q_y - q_x q_y (1 - 2 \sin^2(\theta/2)) - q_z \, 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)) a_y \\
& + (q_x q_z - q_x q_z (1 - 2 \sin^2(\theta/2)) + q_y \, 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)) a_z \\
\\
= & (\cos^2(\theta/2) - (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \sin^2(\theta/2) + 2 q_x^2 \sin^2(\theta/2)) a_x \\
& + 2 (- \cos(\theta/2) q_z \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_y \sin(\theta/2)) a_y \\
& + 2 (\cos(\theta/2) q_y \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_z \sin(\theta/2)) a_z \\
\\
= & (\cos^2(\theta/2) + q_x^2 \sin^2(\theta/2) - q_y^2 \sin^2(\theta/2) - q_z^2 \sin^2(\theta/2)) a_x \\
& + 2 (- \cos(\theta/2) q_z \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_y \sin(\theta/2)) a_y \\
& + 2 (\cos(\theta/2) q_y \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_z \sin(\theta/2)) a_z
\end{aligned}
$$

同様に：

$$
\begin{aligned}
b_y = & (\cos^2(\theta/2) - q_x^2 \sin^2(\theta/2) + q_y^2 \sin^2(\theta/2) - q_z^2 \sin^2(\theta/2) \\
& + 2 (- \cos(\theta/2) q_x \sin(\theta/2) + q_y \sin(\theta/2) q_z \sin(\theta/2)) a_z \\
& + 2 (\cos(\theta/2) q_z \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_y \sin(\theta/2)) a_x \\
b_z = & (\cos^2(\theta/2) - q_x^2 \sin^2(\theta/2) - q_y^2 \sin^2(\theta/2) + q_z^2 \sin^2(\theta/2)) a_z \\
& + 2 (- \cos(\theta/2) q_y \sin(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2) q_z \sin(\theta/2)) a_x \\
& + 2 (\cos(\theta/2) q_x \sin(\theta/2) + q_y \sin(\theta/2) q_z \sin(\theta/2)) a_y
\end{aligned}
$$

そしてこれを，つぎの「*3次元実ベクトルで閉じる四元数倍のパターン*」
(§6.1　3次元ベクトルの四元数倍は？) と比較します：

$$
\begin{aligned}
&(f_r + f_x i + f_y j + f_z k) \times (a_x i + a_y j + a_z k) \times (f_r - f_x i - f_y j - f_z k) \\
&= ((f_r^2 + f_x^2 - f_y^2 - f_z^2) a_x \\
&\quad + 2 (- f_r f_z + f_x f_y) a_y + 2 (f_r f_y + 2 f_x f_z) a_z) i \\
&+ ((f_r^2 - f_x^2 + f_y^2 - f_z^2) a_y \\
&\quad + 2 (- f_r f_x + f_y f_z) a_z + 2 (f_r f_z + f_x f_y) a_x) j \\
&+ ((f_r^2 - f_x^2 - f_y^2 + f_z^2) a_z \\
&\quad + 2 (- f_r f_y + f_x f_z) a_x + 2 (f_r f_x + f_y f_z) a_y) k
\end{aligned}
$$

この比較から，つぎの公式を得ます：

$$
\begin{aligned}
&(\cos(\theta/2) + q_x \sin(\theta/2)\, i + q_y \sin(\theta/2)\, j + q_z \sin(\theta/2)\, k) \\
&\times (a_x i + a_y j + a_z k) \\
&\times (\cos(-\theta/2) + q_x \sin(-\theta/2)\, i + q_y \sin(-\theta/2)\, j + q_z \sin(-\theta/2)\, k) \\
&= b_x i + b_y j + b_z k
\end{aligned}
$$

§6.3「回転の合成は回転になる」での計算省略部分

つぎの２つの回転を合成します：

向き：$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$,　回転：$\theta$

向き：$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$,　回転：$\tau$

そして，この結果がつぎの回転であるとします：

向き：$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$,　回転：$\omega$

(以下，簡単のため，$\cos(\xi/2)$, $\sin(\xi/2)$ をそれぞれ c_ξ, s_ξ と表記します)

このとき

$$
\begin{aligned}
& M(\mathbf{r}, \tau) \times M(\mathbf{q}, \theta) \\
&= (c_\tau + (r_x s_\tau)\, i + (r_y s_\tau)\, j + (r_z s_\tau)\, k) \\
&\times (c_\theta + (q_x s_\theta)\, i + (q_y s_\theta)\, j + (q_z s_\theta)\, k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\tau\, (c_\theta + (q_x s_\theta)\, i + (q_y s_\theta)\, j + (q_z s_\theta)\, k) \\
&+ (r_x s_\tau)\, i\, (c_\theta + (q_x s_\theta)\, i + (q_y s_\theta)\, j + (q_z s_\theta)\, k) \\
&+ (r_y s_\tau)\, j\, (c_\theta + (q_x s_\theta)\, i + (q_y s_\theta)\, j + (q_z s_\theta)\, k) \\
&+ (r_z s_\tau)\, k\, (c_\theta + (q_x s_\theta)\, i + (q_y s_\theta)\, j + (q_z s_\theta)\, k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\theta c_\tau + (q_x s_\theta c_\tau)\, i + (q_y s_\theta c_\tau)\, j + (q_z s_\theta c_\tau)\, k \\
&+ (r_x c_\theta s_\tau)\, i + (q_x r_x s_\theta s_\tau)\, ii + (q_y r_x s_\theta s_\tau)\, ij + (q_z r_x s_\theta s_\tau)\, ik \\
&+ (r_y c_\theta s_\tau)\, j + (q_x r_y s_\theta s_\tau)\, ji + (q_y r_y s_\theta s_\tau)\, jj + (q_z r_y s_\theta s_\tau)\, jk \\
&+ (r_z c_\theta s_\tau)\, k + (q_x r_z s_\theta s_\tau)\, ki + (q_y r_z s_\theta s_\tau)\, kj + (q_z r_z s_\theta s_\tau)\, kk
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\theta c_\tau + (q_x s_\theta c_\tau)\, i + (q_y s_\theta c_\tau)\, j + (q_z s_\theta c_\tau)\, k \\
&+ (r_x c_\theta s_\tau)\, i - (q_x r_x s_\theta s_\tau) + (q_y r_x s_\theta s_\tau)\, k - (q_z r_x s_\theta s_\tau)\, j \\
&+ (r_y c_\theta s_\tau)\, j - (q_x r_y s_\theta s_\tau)\, k - (q_y r_y s_\theta s_\tau) + (q_z r_y s_\theta s_\tau)\, i \\
&+ (r_z c_\theta s_\tau)\, k + (q_x r_z s_\theta s_\tau)\, j - (q_y r_z s_\theta s_\tau)\, i - (q_z r_z s_\theta s_\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\theta c_\tau - q_x r_x s_\theta s_\tau - q_y r_y s_\theta s_\tau - q_z r_z s_\theta s_\tau \\
&+ (q_x s_\theta c_\tau + r_x c_\theta s_\tau - q_y r_z s_\theta s_\tau + q_z r_y s_\theta s_\tau)\, i \\
&+ (q_y s_\theta c_\tau + r_y c_\theta s_\tau - q_z r_x s_\theta s_\tau + q_x r_z s_\theta s_\tau)\, j \\
&+ (q_z s_\theta c_\tau + r_z c_\theta s_\tau - q_x r_y s_\theta s_\tau + q_y r_x s_\theta s_\tau)\, k
\end{aligned}
$$

これが

$$M(\mathbf{t}, \omega) = (c_\omega + (t_x s_\omega)\, i + (t_y s_\omega)\, j + (t_z s_\omega)\, k)$$

に等しいので，

$$
\begin{aligned}
c_\omega &= c_\theta c_\tau - (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z)\, s_\theta s_\tau \\
&= c_\theta c_\tau - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\, s_\theta s_\tau \\
&= c_\theta c_\tau - |\mathbf{q}|\,|\mathbf{r}| \cos\psi\ s_\theta s_\tau \quad (\psi \text{は，} \mathbf{q} \text{と} \mathbf{r} \text{のなす角度}) \\
&= c_\theta c_\tau - \cos\psi\ s_\theta s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_x s_\omega &= q_x s_\theta c_\tau + r_x c_\theta s_\tau - q_y r_z s_\theta s_\tau + q_z r_y s_\theta s_\tau \\
t_y s_\omega &= q_y s_\theta c_\tau + r_y c_\theta s_\tau - q_z r_x s_\theta s_\tau + q_x r_z s_\theta s_\tau \\
t_z s_\omega &= q_z s_\theta c_\tau + r_z c_\theta s_\tau - q_x r_y s_\theta s_\tau + q_y r_x s_\theta s_\tau
\end{aligned}
$$

そこで，向き (t_x, t_y, t_z) と回転角 ω が定義されるためには，つぎのことが成り立っていなければならない：

1. $| c_\theta c_\tau - (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) s_\theta s_\tau | \leqq 1$

2. さらにこのとき，

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$$

1 の証明：

$$c_\theta c_\tau - (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) s_\theta s_\tau$$
$$= c_\theta c_\tau - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) s_\theta s_\tau$$

($\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ のなす角度を ψとすると)

$$= c_\theta c_\tau - | \mathbf{q} | | \mathbf{r} | \cos\psi\ s_\theta s_\tau$$
$$= c_\theta c_\tau - \cos\psi\ s_\theta s_\tau$$
$$= (c_\theta) c_\tau + (- \cos\psi\ s_\theta) s_\tau$$
$$= (c_\theta^2 + (\cos\psi)^2 s_\theta^2)^{1/2} s_{\tau + \alpha}$$

$c_\theta^2 + (\cos\psi)^2 s_\theta^2 \leqq c_\theta^2 + s_\theta^2 = 1$ なので，これの絶対値は $\leqq 1$

2 の証明：

$$(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) \times s_\omega^2$$
$$= (q_x s_\theta c_\tau + r_x c_\theta s_\tau - q_y r_z s_\theta s_\tau + q_z r_y s_\theta s_\tau)^2$$
$$+ (q_y s_\theta c_\tau + r_y c_\theta s_\tau - q_z r_x s_\theta s_\tau + q_x r_z s_\theta s_\tau)^2$$
$$+ (q_z s_\theta c_\tau + r_z c_\theta s_\tau - q_x r_y s_\theta s_\tau + q_y r_x s_\theta s_\tau)^2$$

$$= q_x^2 s_\theta^2 c_\tau^2 + r_x^2 c_\theta^2 s_\tau^2 + q_y^2 r_z^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_z^2 r_y^2 s_\theta^2 s_\tau^2$$
$$+ 2 q_x r_x c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau - 2 q_x q_y r_z s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_x q_z r_y s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau$$
$$- 2 q_y r_x r_z c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau + 2 q_z r_x r_y c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau - 2 q_y q_z r_y r_z s_\theta s_\theta s_\tau s_\tau$$

$$+ q_y^2 s_\theta^2 c_\tau^2 + r_y^2 c_\theta^2 s_\tau^2 + q_z^2 r_x^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_x^2 r_z^2 s_\theta^2 s_\tau^2$$
$$+ 2 q_y r_y c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau - 2 q_y q_z r_x s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_y q_x r_z s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau$$
$$- 2 q_z r_x r_y c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau + 2 q_x r_z r_y c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau - 2 q_z q_x r_z r_x s_\theta s_\theta s_\tau s_\tau$$

$$+ q_z^2 s_\theta^2 c_\tau^2 + r_z^2 c_\theta^2 s_\tau^2 + q_x^2 r_y^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_y^2 r_x^2 s_\theta^2 s_\tau^2$$
$$+ 2 q_z r_z c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau - 2 q_z q_x r_y s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_z q_y r_x s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau$$
$$- 2 q_x r_y r_z c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau + 2 q_y r_x r_z c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau - 2 q_x q_y r_x r_y s_\theta s_\theta s_\tau s_\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= q_x^2 s_\theta^2 c_\tau^2 + q_y^2 s_\theta^2 c_\tau^2 + q_z^2 s_\theta^2 c_\tau^2 \\
&+ r_x^2 c_\theta^2 s_\tau^2 + r_y^2 c_\theta^2 s_\tau^2 + r_z^2 c_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ q_x^2 r_z^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_y^2 r_x^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_z^2 r_y^2 s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ q_x^2 r_y^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_y^2 r_z^2 s_\theta^2 s_\tau^2 + q_z^2 r_x^2 s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&- 2 q_y q_z r_y r_z s_\theta^2 s_\tau^2 - 2 q_z q_x r_z r_x s_\theta^2 s_\tau^2 - 2 q_x q_y r_x r_y s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 q_x r_x c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_y r_y c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_z r_z c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2 q_x q_y r_z s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_y q_z r_x s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau + 2 q_z q_x r_y s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau \\
&+ 2 q_x r_y r_z c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau + 2 q_y r_z r_x c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau + 2 q_z r_x r_y c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau \\
&- 2 q_x q_y r_z s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau - 2 q_y q_z r_x s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau - 2 q_z q_x r_y s_\theta s_\theta c_\tau s_\tau \\
&- 2 q_x r_y r_z c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau - 2 q_y r_z r_x c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau - 2 q_z r_x r_y c_\theta s_\theta s_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) s_\theta^2 c_\tau^2 \\
&+ (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) c_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ (q_x^2 (r_y^2 + r_z^2) + q_y^2 (r_x^2 + r_z^2) + q_z^2 (r_y^2 + r_x^2)) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&- 2 (q_x q_y r_x r_y + q_y q_z r_y r_z + q_z q_x r_z r_x) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= s_\theta^2 c_\tau^2 + c_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ (q_x^2 (1 - r_x^2) + q_y^2 (1 - r_y^2) + q_z^2 (1 - r_z^2)) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&- 2 (q_x q_y r_x r_y + q_y q_z r_y r_z + q_z q_x r_z r_x) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 - c_\theta^2) c_\tau^2 + c_\theta^2 (1 - c_\tau^2) \\
&+ s_\theta^2 s_\tau^2 - (q_x^2 r_x^2 + q_y^2 r_y^2 + q_z^2 r_z^2) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&- 2 (q_x q_y r_x r_y + q_y q_z r_y r_z + q_z q_x r_z r_x) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\theta^2 + c_\tau^2 - 2 c_\theta^2 c_\tau^2 \\
&+ (1 - c_\theta^2)(1 - c_\tau^2) \\
&- (q_x^2 r_x^2 + q_y^2 r_y^2 + q_z^2 r_z^2 \\
&+ 2 (q_x q_y r_x r_y + q_y q_z r_y r_z + q_z q_x r_z r_x)) s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - c_\theta^2 c_\tau^2 \\
&- (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z)^2 s_\theta^2 s_\tau^2 \\
&+ 2 (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) c_\theta s_\theta c_\tau s_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - (c_\theta c_\tau - (q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z) s_\theta s_\tau)^2 \\
&= 1 - c_\omega^2 \\
&= s_\omega^2
\end{aligned}
$$

よって,

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$$

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/subjects/number/quaternion/

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「数」がわかる本 数学編 (4)

四元数

2008-12-11　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)
2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp