図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」の数学 対 学校数学 (2)

量とは何か？

学校数学の「量」と数学の「量」

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学対学校数学 (2)

量とは何か？

学校数学の「量」と数学の「量」

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は，「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの，＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの２になるものです。

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの趣旨は，読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは，＜「数」がわかる本＞シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は，数学の「数」とは違っています。特に，学校数学の「数」は，数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは，このことを理解している必要があります。そして，このことの理解には，数学の「数」の理解が含まれるわけです。

本書を読むためには，その中の特に『いろいろな数がつくられるしくみ』『「数とは何か？」への答え』の両方に目を通しておくことが必要です。本書の中でも数学の「数」に言及・解説していますが，それはあくまでも，数学の「数」を改めて確認するという趣旨のものです。

「「数」がわかる本」シリーズは，現在かなり大部になっています。そこで，この内容の＜早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので，利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

＜「数」がわかる本＞シリーズ　(数学の「数」)

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズ　(イデオロギーの「数」)

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？—学校数学の「量」 (本テクスト)
- 「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学
- 「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

＜「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ　(モンスターの「数」)

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに――本書の趣旨

本書は，『数は量の比――「数は量の抽象」ではない』(以下『数は量の比』) への導入ないし簡約版としてつくるものである。というのも，『数は量の比』は，初学者にとってはけっこうな分量になっていて，主題を捉えることが困難なふうになっているからである。

『数は量の比』の主題は，つぎのものである：

> 学校数学の「数」は「数は量の抽象」であり，これは数学の「数」ではない。 数学は，「数は量の比」になる。
> したがって，数学的におかしなことが「数の指導」として現前している。

また，数学の「数」については，つぎの３書で解説している：

> 『いろいろな数がつくられるしくみ』
> 『「数とは何か？」への答え』
> 『四元数』

「数は量の抽象」は，数学としての論理の体系が立たない。
学校数学は，「数は量の抽象」である。
学校数学の「数」の論議は，従うべき論理をもたないから，なんでもありの論議になる。
よって，それはきまって論争に進む。
ときに攻撃になり，相手の貶し合いになる。

> 例：「かけ算の順序」論争 (『「かけ算の順序」の数学』)

これに対し，数学には論争はない。
実際，論理の体系にするとは，論争を無いものにするということである。
数学で論争が起こったとき，それは論理の体系に欠陥があるという意味になり，論理の体系の修正に向かうのみとなる。

「数は量の抽象」は数学ではない。
数学ではないとしたら，何か？
イデオロギーである。
実際，それの出自の歴史においても，それはイデオロギーだったのである。

1 学校数学は「数は量の抽象」，
数学は「数は量の比」

1.1　学校数学の「数」は, 遠山啓の唱えた「数は量の抽象」

むかし, 「数は量の比」と「数は量の抽象」の間の論争があった。
「数は量の抽象」を唱えたのは, 遠山啓である。
結果は, 「数は量の抽象」が学校数学になった。
遠山啓の「数は量の抽象」が論争に勝ったということである。

1.2　数学は, 「数は量の比」

数学の「数」には, 自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数, 四元数, · · · · といったものがある。
これらは, それぞれ「数」の意味の実現である。
「数」の意味は, 「量の比」である。
これらは, それぞれ「量の比」の実現であり, このことによって「数」である。

数学は, 「数は量の比」である。

むかし, 「数は量の比」と「数は量の抽象」の間の論争があった。
結果は, 「数は量の抽象」が学校数学になった。
数学の「数は量の比」が論争に負けたのである。

1.3「数は量の抽象」では ,「数」の意味が教えられない

「数」の意味は, 「量の比」である。
しかし, 学校数学は「数は量の抽象」である。
こうして, 学校数学は「数」の意味が教えられるところではなくなっている。

実際, つぎの問いに答えられる者は, 学校数学からは出て来ない：

「*自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数は,*
どういう意味において, すべて数なのか？」

2　遠山啓の「量」

2.1「数は量の抽象」の時代背景

「数は量の抽象」の意味は, これの時代背景を見ていかないとわからない。
実際，学校数学の「数」は，時代の産物の体 (てい) である。この「時代の産物」を語らずして，学校数学の「数」は語れない。

「数は量の抽象」の時代背景は,「階級闘争 (ブルジョア対プロレタリアート)」をイデオロギーとする政治運動である。
この政治運動では，当然，学校教育が重点課題になる。そして，学校教育で運動の主体をつとめたのが，時の日教組であった。
この運動は「国民教育運動」と称される。

課題は，ブルジョア政権から学校教育を取り返し,「国民」のための学校教育を打ち立てることである。「国民」の思想性・精神性・知性を同定し，これを陶冶する教育を実現することである。

この課題は，各教科に降ろされる。
各教科で,《ブルジョア政権下の学校教育に対立軸をつくる》の構えで運動がスタートする。
そして,《対立軸をつくる》の格好でスタートしたものは，決まって無理をすることになる。
牽強付会をやってしまうのである。

2.2「数は量の抽象」は，唯物論の数学の構想から

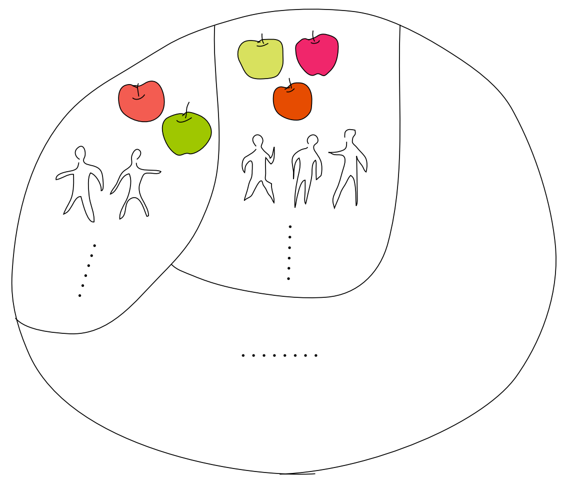
学校数学では,「唯物論の数学」を対立軸にしたことになる。
現行を「観念論の数学」(ブルジョアの数学) と定めて「唯物論の数学」を対置すれば，ぴったり嵌るわけである。

「唯物論の数学」の構想は，カントールの集合論をベースにするというものであった：

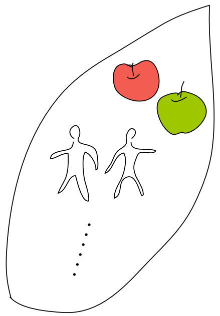
> *唯物世界の所与を数学の形にすると，それは集合である。*
> *集合論から数学の体系を紡ぎ出せれば，それは唯物論の数学をつくったことになる。*

そしてこの構想の最初の試行になるのが,「数」である。
これはつぎのようになる：

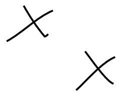
> 唯物世界である集合で, 物の集合を「対等 (１対１の対応がつく)」の関係で類別する：



一つの類を一つの対象を表していると見るとき，それは個数 (量) である：



そして，個数 (量) から個を捨象すれば，それは数である。



：　2

＜数の唯物論──" 数より先に物がある " ＞を立てることに成功！

実際には，この「数学」構想はうまくいかない。
しかし,「うまくいってもらわないと*困る*」の意識が, 牽強付会をさせる。
その結果が現前の「数は量の抽象」というわけである。

2.3　数の積は量の積の抽象

「数は量の抽象」とするとき，数の構成要素を一々量を構成するものの抽象としなければならなくなる。特に，数の積は，量の積の抽象として説明しなければならない。

数の和であれば，量にも和があるのでなんとか強引に説明をつくれる。しかし，数の積の場合は，量には積がないので困ってしまう。例えば，時間同士の積を実体概念として立てるのはつらい。

そこで，「*量には積がある*」ではなくて「*量には積の立つものがある*」というふうに変える。例えば，「*速さと時間の積があり，そしてそれは距離である*」を用いる。そして，数の積はこのような量の積の抽象であるとする。

これに対しては「このときの積の意味は何か？」が問題になりそうだが，唯物論というのはつぎのように応じることができるのである：

> 「*量の積は現前であり，思考はこれを所与としなければならない*
> *──量の積は公理である。*
> *積の意味を考えるのは，数の積を先に考えてしまっているからである。*
> *量の積は，唯物論の目によって直観しなければならない。*
> *(直観できないのは，思想が悪いのである。)*」

2.4　数の和は量の和の抽象

「数は量の抽象」では，数の和は量の和の抽象になる。
そしてこのとき, 遠山啓はさらに「外延量･内包量」の区別を立てている。

内包量とは，和が立たない量のことである。
そして，速さをこれの例にする。 ——時速 100km/h と 120km/h の電車は連結できないというわけである (唯物論！)。

> 速さは，物理学だと普通に和を立てるものであり，数学も和を立てるが，学校数学は確かにいまも速さの和を退けている。

2.5　遠山啓のディレンマ

遠山啓は，現行の学校数学に対立軸をつくるというスタンスから，「数」の理論づくりに入っていった。そして，このスタンスが無理・牽強付会をさせる。

数学者である遠山には，当然自分の論の無理が見えてくる。
実際，「数は量の比」に対する遠山の批判の中には，「数は量の比」に対しこれをモジュール (加群) の論として位置づける文言がある。「数は量の比」の数学は，遠山に当然見えているわけである。
また,「関係概念は難しいから, 実体概念でやるのである」の文言もある。
これは,「量の比は難しいから, 量の抽象でやるのである」の意味になる。

しかし遠山は，もうこのまま行くしかない者に自らをしてしまった。自分を信じ，ついてくる大集団がつくられてしまっているからである。

一般に，これがプロジェクトの罠というものである。
プロジェクトリーダは，自分のアイデアに最初自己陶酔する。＜永遠＞を捉えたような気分になって，独善に走る。
やがて，アイデアのほころび・間違いが見えてくる。
しかし，プロジェクトは既に多くの者を引き込んでしまっている。もう引っ込みがつかない。

3　数学の「量」

3.1　数は量の比，量は形式

数学は，「数は量の比」である。

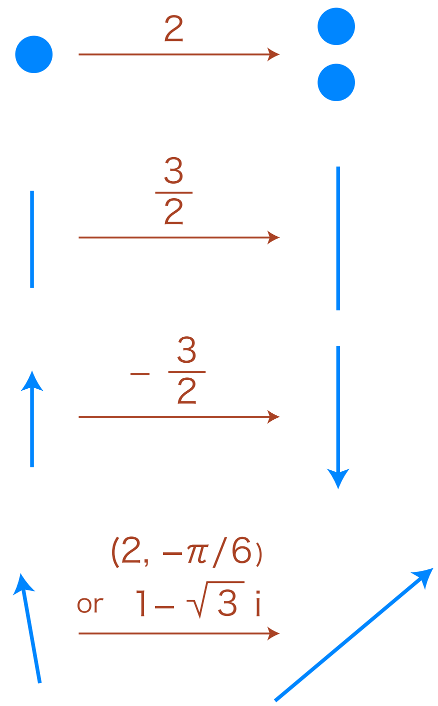
「数は量の比」と言うと，数以前に量があるように見える。しかし，数学の量は形式であって，数を素材にしてこれを構成し定義する。そして，この形式に同型な対象を「量」と呼ぶ。

数学は (量形式の他には) 量を明示的に構成することはしない。
例えば「時間」ということばが出てきても，これの意味はつぎのようになる：

「量形式に同型なものとして生活の中で使っているあの " 時間 "」

数学は形式の学であり，量が数学の対象になるときも形式である。

自然数，整数，有理数，‥‥と，数にはいろいろある。このことは，いろいろなタイプの量が対象化されており，「数は量の比」にいろいろあることを，意味する：



3.2　数を素材にして，量の普遍対象をつくる

形というものを，どのように定義するか？
数学では，つぎの２通りで，形を定義する：

A.「対象Ｘがつぎの条件を満たすとき，Ｘは○○であるという。」
B.「対象Ｘが対象Ｕと同型であるとき，Ｘは○○であるという。」

A は，形を直接表現している。
B は，形を「ある対象Ｕの形」の言い方で表現している。

Ｂの場合，「対象Ｕ」を先に定義しておくことになる。そして数学では，このときの「対象Ｕ」の在り方を「○○の普遍対象」と呼んでいる。

数学の「量」の定義は，Ｂのようになる。
すなわち,「量の普遍対象」を定義して, これに同型な系を「量」と定める。
このときの「量」のリアリティについては, 数学は関知しない。数学は, 量の存在論を自らの埒外とする。

量の普遍対象は，一つの数の系 (N, ＋ , ×) に対する系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) で定義される。
特に，数の系 (N, ＋ , ×) のいろいろ（自然数，整数，有理数，‥‥）に応じて，量のタイプ (カテゴリー) のいろいろが導かれる。

以下，このことについて，説明する。

数学では，結局，量をつぎのカテゴリー区分で対象化していることになる：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ			
	大きさと１次元方向			
	大きさと２次元方向			
	⋮			

ただし，このうち「意味のあるカテゴリー」として実際に対象化しているのは，つぎのものである：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	○	○	○
	大きさと１次元方向	○	○	○
	大きさと２次元方向			○
	大きさと４次元方向			○
	⋮			⋮

そして，このカテゴリーを実現するものが，数 (系) である。
複数のカテゴリーがあるので，複数の数 (系) が必要になる。
これをつぎのようにつくっていく――矢線の意味は「導出・拡張」：

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
& & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}
$$

そして所期の＜量の普遍対象＞ (量形式) を，つぎのようにつくる：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times))$	$((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$
	⋮			⋮

(四元数については，つぎのテクストにあたられたい：『四元数』)

註：「((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))」の話は，数学のどこにあるのか？

線型空間論で「体Ｋ上のｎ次元線型空間Ｅ」を少し進むと，

「Ｋからの線型空間 K^n の導出」

「線型空間Ｅと K^n の同型」

の話が出てくるが，このときの「線型空間 K^n」が「((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))」と対応している。

ただし，「線型空間」と「量」は同じではない：

自然数 (ℕ, ＋ , ×) に対する量 ((ℕ, ＋), ×, (ℕ, ＋ , ×)) は，線型空間ではない。

スカラが実数の２次元実線型空間 (($\mathbb{R}^2$, ＋), ×, (ℝ, ＋ , ×)) は量ではない。

一方，複素数をスカラとしたときの１次元の線型空間 (($\mathbb{R}^2$, ＋), ×, (ℂ, ＋ , ×)) は，((ℂ, ＋), ×, (ℂ, ＋ , ×)) と同型なので，量である。

等々

3.3　量であるとは，量の普遍対象と同型であること

数学の「量」の定義は，つぎのようになる：

1. ＜量の普遍対象＞を，一つの数の系 $(N, +, \times)$ に対する系 $((N, +), \times, (N, +, \times))$ として定義する。
2. これに同型な対象 $((Q, \mathbf{+}), {}_{\mathbf{\times}}, (N, +, \times))$ を，「$((N, +, \times)$ を比の系とする$)$ 量」と呼ぶ。

ここで，$((Q, \mathbf{+}), {}_{\mathbf{\times}}, (N, +, \times))$ が $((N, +), \times, (N, +, \times))$ と同型であるとは，１対１対応 $f : Q \longrightarrow N$ でつぎの条件を満たすものが存在するということ：

$$f(\mathbf{x} \mathbf{+} \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(\mathbf{x}\,{}_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{x}) \times n$$

$((Q, \mathbf{+}), {}_{\mathbf{\times}}, (N, +, \times))$ が確かに「量」のようになっていることを，見ていくとしよう。

(1) 先ず，Ｑの任意の要素 $\mathbf{q}$ は，$f(\mathbf{u}) = 1$ である $\mathbf{u} \in Q$ に対し，$\mathbf{q} = \mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, n$, $n \in N$ の形に一意的に表される。――これは, Ｑの要素が「$\mathbf{u}$ を単位にして測る」ことができ, そして「測定値は n」ということである。

証明：

$f(\mathbf{q}) = n$ とすると，$f(\mathbf{q}) = f(\mathbf{u}) \times n = f(\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, n)$

f は１対１だから，$\mathbf{q} = \mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, n$

また，$\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, m = \mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, n$ とすると，

$m = f(\mathbf{u}) \times m = f(\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, m) = f(\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{u}) \times n = n$

(1)'　$(N, \times)$ が左可約ならば，Ｑの任意の要素 $\mathbf{q}$ に対し――ただし，$(Q, \mathbf{+})$ に零元が存在するとき（すなわち $(N, +)$ に零元が存在するとき）は，零元でない $\mathbf{q}$ に対し――つぎが成り立つ：

$$\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n \text{ ならば，} m = n$$

証明：

$\mathbf{q} = \mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, k$ とすると，$k \times m = (f(\mathbf{u}) \times k) \times m = f(\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, k) \times m = f(\mathbf{q}) \times m = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m) = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{q}) \times n = f(\mathbf{u}_{\mathbf{\times}}\, k) \times n = (f(\mathbf{u}) \times k) \times n = k \times n$

$(N, \times)$ が左可約だから，$m = n$

(2) Ｑの要素の倍の倍は，数の積の計算になる：

$$(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m)_{\mathbf{\times}}\, n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m \times n)$$

証明：

$f((\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m)_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m) \times n = (f(\mathbf{q}) \times m) \times n = f(\mathbf{q}) \times (m \times n) = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m \times n))$

f は１対１だから，$(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m)_{\mathbf{\times}}\, n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m \times n)$

(3) Ｑの要素の和は，数の和の計算になる：

$$\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m + \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m + n)$$

証明：

$f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m + \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m) + f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n) = f(\mathbf{q}) \times m + f(\mathbf{q}) \times n = f(\mathbf{q}) \times (m + n) = f(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m + n))$

f は１対１だから，$\mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, m + \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}\, n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}}(m + n)$

3.4　数の積は「倍の倍」，数の和は「倍の和」

遠山啓の「数は量の抽象」では，数の積は量の積の抽象，数の和は量の和の抽象になる。
これに対し数学の「数は量の比」では, 数の積は「倍の倍」, 数の和は「倍の和」になる。（量であるとは，量の普遍対象と同型であること）

4　学校数学の量計算

4.1　例：量の倍の計算問題

この節では，学校数学で指導される量計算がどのようであって，数学の量計算とどのように異なるかを，見ていくことにする。
そして，これを特に，量の倍の計算問題で見ていく。

例として，重さの倍関係「２ｇ (ぐらむ) の３倍は６ｇ」を考える：

$$2\,\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\,\mathrm{g}$$

「３倍」「６ｇ」「２ｇ」のどれを未知にするかによって，つぎの３タイプの計算問題が導かれる：

「２ｇの何倍が６ｇか？」　$2\,\mathrm{g} \xrightarrow{何} 6\,\mathrm{g}$

「２ｇの３倍は何ｇか？」　$2\,\mathrm{g} \xrightarrow{3} 何\,\mathrm{g}$

「何ｇの３倍が６ｇか？」　$何\,\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\,\mathrm{g}$

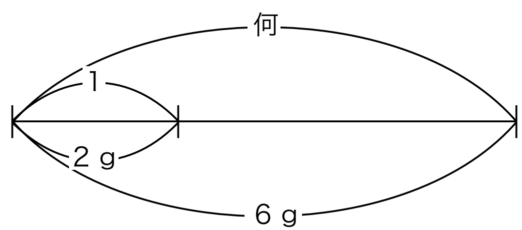
4.2　学校数学は「１と見る / １あたり量」を指導

「２ｇの３倍は６ｇ」から導かれる３タイプの問題：

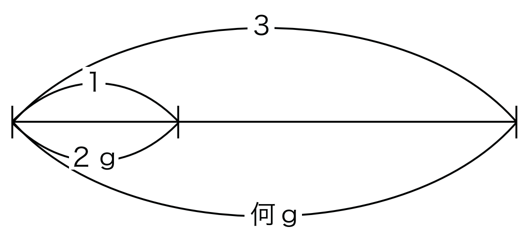
「２ｇの何倍が６ｇか？」
「２ｇの３倍は何ｇか？」
「何ｇの３倍が６ｇか？」

に対し，学校数学は「１と見る / １あたり量」の考えで解答をつくるよう生徒に指導する。

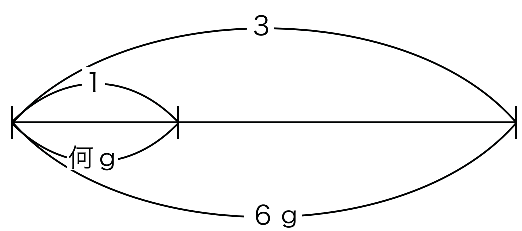
解答は，つぎのようになる：



比の第１用法 $\Longrightarrow$ 何 ＝ 6 ÷ 2



比の第２用法 $\Longrightarrow$ 何 ＝ 2 × 3



比の第３用法 $\Longrightarrow$ 何 ＝ 6 ÷ 3

4.3　数学の量計算

「２ｇの３倍は６ｇ」から導かれる３タイプの問題：

　　「２ｇの何倍が６ｇか？」
　　「２ｇの３倍は何ｇか？」
　　「何ｇの３倍が６ｇか？」

に対する数学の解法は，つぎのようになる：

問題	「2ｇの何倍が6ｇか?」	「2ｇの3倍は何ｇか?」	「何ｇの3倍が6ｇか?」
問題を図式化	$2g \xrightarrow{何} 6g$	$2g \xrightarrow{3} 何g$	$何g \xrightarrow{3} 6g$
「○g」を分析	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6 = 2 \times 何"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何 = 2 \times 3"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6 = 何 \times 3"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times ○ = ○ \times m = n$ 「$n \div m$」	$何 = 6 \div 2$	$何 = 2 \times 3$	$何 = 6 \div 3$

4.4「１と見る / １あたり量」は空回りのプロセス

「数は量の抽象」の学校数学は，量の倍の問題に対しつぎの３つをセットにして解法をつくる：

　　　「１と見る / １あたり量」
　　　「線分図」(「数直線」)
　　　「比の３用法」

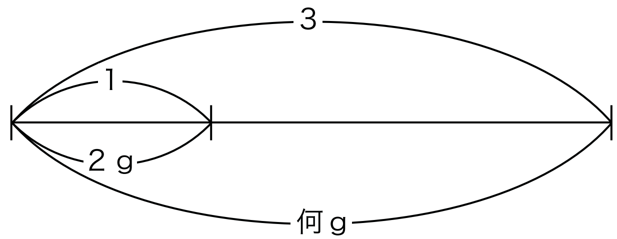
　　註：特にこのことから, 学校数学では「数直線」が基本主題になる。
　　　一方数学では，「数直線」は量計算において無用のものである。

以下，この解法が数学として何をやっているのかを，見ていく。

「２ｇの３倍は何ｇか？」(比の第２用法の適用ということになる問題) を例にする。

先ず，「ｇ」の表現の数学的意味を，確認しておこう。この表現は，重さと量形式 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) (N は $\mathbb{N}$, または $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$) の間に，ｇに１を対応させる同型 (ｆとする) を立てていることを意味する。

ところで「１と見る / １あたり量」は, 重さと量形式 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) の間に，さらにもう一つ同型を立てる。すなわち，２ｇに１を対応させる同型 (ｈとする) である。
同型対応ｈでは，２ｇの３倍である何ｇに，１の３倍である３が対応する。
ここまでで，つぎの図になる：



つぎに「比の第２用法」の適用として「何＝２× ３」が立式される。
やっていることがもし数学であるならば，「比の第２用法」の適用は定理の適用というものでなければならない。

では，「比の第２用法」を定理の形で述べるとどうなるか？
つぎのようになる：

> 定理： ｆ ($\mathbf{u}$) = １である同型ｆ：Q ⟶ N，ｈ ($\mathbf{u}_{\times}m$) = １である同型ｈ：Q ⟶ N，そしてn∈ N に対し，ｆ (($\mathbf{u}_{\times}m$) $_{\times}$ n) ＝ m × n が成り立つ。

実際，この問題は，$\mathbf{u}$ がｇ，mが２，ｎが３の場合である。
($u_{\times}m$) $_{\times}$ nが ２ｇの３倍であり, これの数値ｆ (($u_{\times}m$) $_{\times}$ n) が「何ｇ」の「何」として求めるものである。そして定理から，この数値がm×n，すなわち２× ３であることが結論される。

ここで改めて，定理を見てみよう。
「１と見る / １あたり量」にあたる「ｈ ($\mathbf{u}_{\times}m$) = １である同型ｈ：Q ⟶ N」は，何にも効いていない。
実際，定理はつぎの形で済む：

> 定理：f（**u**）＝1である同型 f：Q ⟶ N，そしてn∈ N
> に対し，f（(**u** $\times$ m）$\times$ n）＝ m × n　が成り立つ。

「1と見る／1あたり量」は，ただ空回りしているのである。

「数は量の抽象」の問題解法は，空回りする。
こうなるのは，「数は量の抽象」がもともと循環論法だからである。

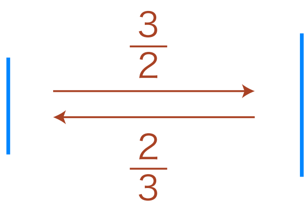
5　学校数学における数の意味指導の混迷

5.1　例：「2/3 は 1/3 の２つ分」

「2/3」の意味は，比を表す「２対３」である。
しかし，学校数学の 2/3 は，量である。特に，量１/3 が２つ集まった量である。

分数を量にしているため,「3/2」はもとをはみ出る量になる。そこで,「真分数・仮分数・帯分数」の考えが出てくる。
「真分数・仮分数・帯分数」の主題は，学校数学でいまも盤石である。

註：　分子が分母より大きいことに特別な意味はない。
　3/2 は，2/3 と互いに「逆の比」の関係に立つ。どちらか一方が特別というものではない。



5.2　例：負の数は，「逆遡行から導かれる数」

「量の比」としての正負の数は，学校数学の内容にされない。

学校数学では，正負の数は，「････ → 3 → 2 → 1 → 0」の溯行をさらに進めるときに現れてくる数，みたいに導入される。あるいは，正逆２方向の量の「抽象」として導入される。

このように導入される正負の数に対しては，積（記号「×」の文法）の指導を組み立てることなどは無理である。しかし無理を通すわけであるから，指導はひどくナンセンスなものになる。

5.3　例：複素数は，「方程式に解をもたせるための数」

「量の比」としての複素数は，学校数学の内容にされない。

学校数学では，複素数は方程式に解をもたせるための数として導入される。すなわち，

　　「*$x^2+1=0$ のように既習の数では解をもてない 方程式も，*
　　　解を持てるようにしよう」

ということになって作為した数として導入される。

特に，リアルではないイマジナリーな数，嘘の数（「虚数」）として導入される。生徒には，

　　「*イマジナリーな数 / 嘘の数だが，*
　　　これを考えることができるのが数学の偉いところ」

みたいな，わけのわからない説明がされる。

複素数に対する「代数的閉体」の特徴づけを，学校数学は複素数の意味としているわけである。

おわりに

学校数学の「数と量」に関する内容の議論のうちには，イデオロギーが行う議論がある。この場合，内の議論であれば，連帯を保つ風で仲がよいが，外との議論になると，論争そして攻撃になり，特に門切り方の＜貶す＞がスタイルになる。

数学は, 議論･論争をつくらない方法をつくり, これを自分の方法にした。論の前提を明示的に定め, 推論によって得られる命題のみを言明とする。言明に議論・論争が現れるのは数学の体系の欠陥ということになり，このときは体系の修正に向かう。

もっとも，イデオロギーが行う議論・論争も，＜貶す＞を含め，大いに盛んなのがよい。どれもこれも，＜個の多様性＞を現しているわけである。

しかし一方，学校数学がこの種の議論・論争に簡単に翻弄されるものでないよう気を配ることは，大事である。

そして，数学を意識し数学に目を向けることが，簡単に翻弄されないための唯一の方法である。

本書は，このスタンスで作成したものである。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/instruction/subjects/number/quantity_what/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学と学校数学 (2)

量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」

2010-12-17　初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)
2010-12-19　タイトル副題の変更
2012-02-07　「本シリーズについて」を更新

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

---

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp