

図解

現職教員・教員養成コース学生
& 数をわかりたい人のための
「数」がわかる本シリーズ
数学編 (7)

「小数」の数学

Ver. 2012-04-10

北海道教育大学教授
宮下英明 著



「数」がわかる本 数学編 (7)

「小数」の数学

本書について

本書は、

<http://m-ac.jp/>

のサイトで書き下ろしている『「小数」の数学』を PDF 文書の形に改めたものです。

文中の青色文字列は、ウェブページへのリンクであることを示しています。

本シリーズについて

本テキストは、「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの、<「数」がわかる本>シリーズの7になるものです。

<「数」がわかる本>シリーズの趣旨は、数学で謂う「数」が何であるかを勉強できるテキストを提供することです。

「数」が何かを知らなくては、算数・数学科の授業はつくれません。しかし、「数」が何かを勉強できる適切なテキストが、ちまたには見あたりません。そこでこれを作成することにしました。

<「数」がわかる本>シリーズは、現在かなり大部になっています。そこで、この内容の<早わかり>としてつぎのテキストを用意していますので、利用してください：

『「数の理解」15講』



「数」がわかる本 既刊一覧

<「数」がわかる本>シリーズ（数学の「数」）

「数とは何か？」への答え

いろいろな数が「数」であること

いろいろな数がつくられるしくみ

四元数

量計算の論理

「数の理解」15講

「小数」の数学

<「数」の数学対学校数学>シリーズ（イデオロギーの「数」）

数は量の比 — 「数は量の抽象」ではない

量とは何か？—学校数学の「量」

「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学

「数直線でかけ算・わり算」は、わかるのがおかしい(本テキスト)

<「かけ算の順序」論争解説>シリーズ（モンスターの「数」）

「かけ算の順序」論争概説

「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ

「かけ算の順序」の数学

「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

はじめに	2
1 小数倍	5
1.1 対象とする量：順序稠密量	6
1.2 十進数の延長	7
1.3 小数倍の形式	9
1.4 小数表記「(N, n)」	15
1.5 小数倍と分数倍の関係	17
2 小数の算法	19
2.1 小数の和, 求和法	20
2.2 小数の積, 求積法	25
2.3 小数の商, 求商法	30
3 小数の「数」としての位置	41
3.1 数の系としての自立	42
3.2 「有理数」の解釈	43
おわりに	46

本文イラスト， ページレイアウト， 表紙デザイン：著者

はじめに

「小数」は、小学数学（「算数」）の内容である。

一方、「小数」は数学の内容である。この数学の理解は、小学生の能力をはるかに超える。小学数学の「小数」は、教育的方便の立場で、巧妙に「数学」を薄めているわけである。

しかし、「薄める」は「曖昧にする」である。

明証にこだわるタイプの者は、「曖昧」を呑み込めなくて、くわからない・できない者になってしまう。逆に、教育的方便にじょうずに騙された者が、くわかる・できる者になる。

また「曖昧」は、教員の教材研究を誤った方向に進ませるものになる。

よって、くわかる・できるを間違っって判断したり、教材研究で過ちをするわけにはいかない立場にいることを自覚する者は、「小数」の数学を押さえておかねばならないことになる。

そこで、本テキストを以て、「小数」の数学の押さえを行う。

1 小数倍

1.1 対象とする量：順序稠密量

1.2 十進数の延長

1.3 小数倍の形式

1.4 小数表記「 (N, n) 」

1.5 小数倍と分数倍の関係

1.1 対象とする量：順序稠密量

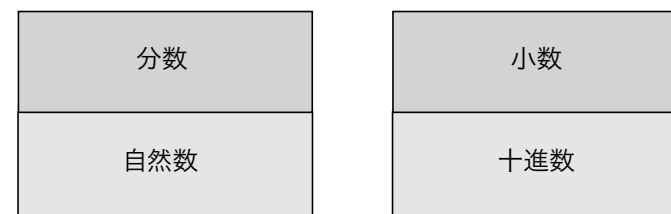
小数で対象になる量は、順序稠密量である。分数で対象になる量も、順序稠密量である。違いは、つぎの通りである：

- ・ 小数で対象になる順序稠密量は、
《任意の自然数 n に対し、 10^n 等分が可能》が条件。
- ・ 分数で対象になる順序稠密量は、
《任意の自然数 n に対し、 n 等分が可能》が条件。

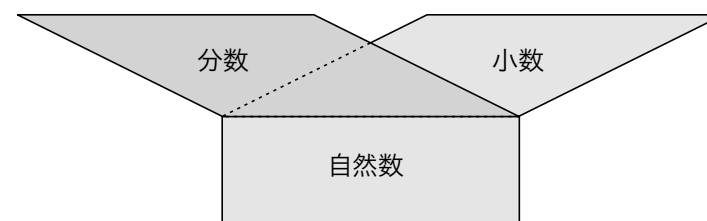
1.2 十進数の延長

分数と小数が対象とする量は、ともに順序稠密量ということで、同じである。しかし、日常生活では小数がもっぱら使われる。それは、小数が十進数の延長になるからである。

分数が自然数を直接ベースにするのに対し、小数は十進数をベースにする。《自然数そのものではなく、自然数実現の一形態であるところの十進数が、小数のベースになる》——このとらえが重要である。



実際、このとらえを失すると、自然数の上に分数と小数が横並びした図を描くふうになってしまう。



小数のこのとらえは、間違い

「十進数」とは何か？

自然数の出自は、個数（離散量）の対象化である。個数を表現しようと

する実践の中から、自然数(「系列」)がつくられてくる。

「系列」の数学的定式化は、ペアノの公理である。

「系列」の実現の仕方は、一通りではない。

「系列」の実現方法として、「十進数」が考え出された。

十進数の「十」は、人の指の本数が十であることに拠る。指で数える行為が、自ずと「十進」を導いたのである。数としての特別な意味が「十」にあるわけではない。

(→『いろいろな数がつくられるしくみ』)

わたしたちにとって、「十進数」は自然数としてあたりまえのものになっている。すなわち、十進数と自然数の混同が普通になっている。

実際、自然数と十進数を区別できるようにするものは、数学である。翻って、自然数と十進数の混同のあるところには、数学の閑却がある。

1.3 小数倍の形式

十進数で個数を数えるとき、例えば 1234 個は、

10 個の 10 個の 10 個が 1 つ
 10 個の 10 個が 2 つ
 10 個が 3 つ
 個が 1 つ

と同じになる。このことを転じて、

……
 10 個の 10 個の 10 個
 10 個の 10 個
 10 個
 個

の単位システム——十進の単位システム——を予めつくっておいて、

……
 10 個の 10 個の 10 個がいくつ⁽³⁾
 10 個の 10 個がいくつ⁽²⁾
 10 個がいくつ⁽¹⁾
 個がいくつ⁽⁰⁾
 (「いくつ^(k)」は 0~9)

と数える。このとき、つぎが個数と一致する：

…… [いくつ⁽³⁾] [いくつ⁽²⁾] [いくつ⁽¹⁾] [いくつ⁽⁰⁾]

「1, 2, 3, ……」と一つずつ数えていくやり方と比べると、この方法は計数の労力を劇的に減らすものになっている。

これが、計数における十進数のメリットである。

註：十進数の意義は、計数と計算におけるメリットである。

ここで、場面は「順序稠密量」になる。順序稠密量が対象化され、順序稠密量の表現が課題とされる。

離散量は、「個」という原子(部分のないもの)を考える。この「部分がない」の制約を外して「任意に部分をとれる」にすると、順序稠密量概念になる。順序稠密量の「稠密」の意味は、「任意に部分をとれる」である。

離散量では、量を「個がいくつ」で表した。このことを、ここでつぎのように解釈する：

- (1) 量は、「もとの量の何倍」で表す。
- (2) 離散量では、「もとの量」が「個」になっていて、「何倍」が「いくつ」になっている。

順序稠密量の場合、「もとの量」は全く恣意的に決めることになる。これは「個」ではないので、新たに「単位」と呼ぶ。

順序稠密量を表現するのに、十進数による個数の数え方を素直に拡張(延長)する。すなわち、単位からつぎの単位システムを導く：

……
 単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍
 単位の 10 倍の 10 倍
 単位の 10 倍
 単位
 単位の 10^{-1} 倍
 単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
 単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
 ……

そして、量をつぎのように測る：

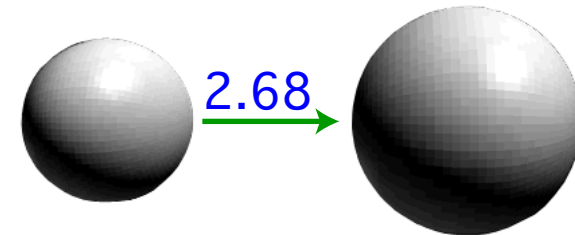
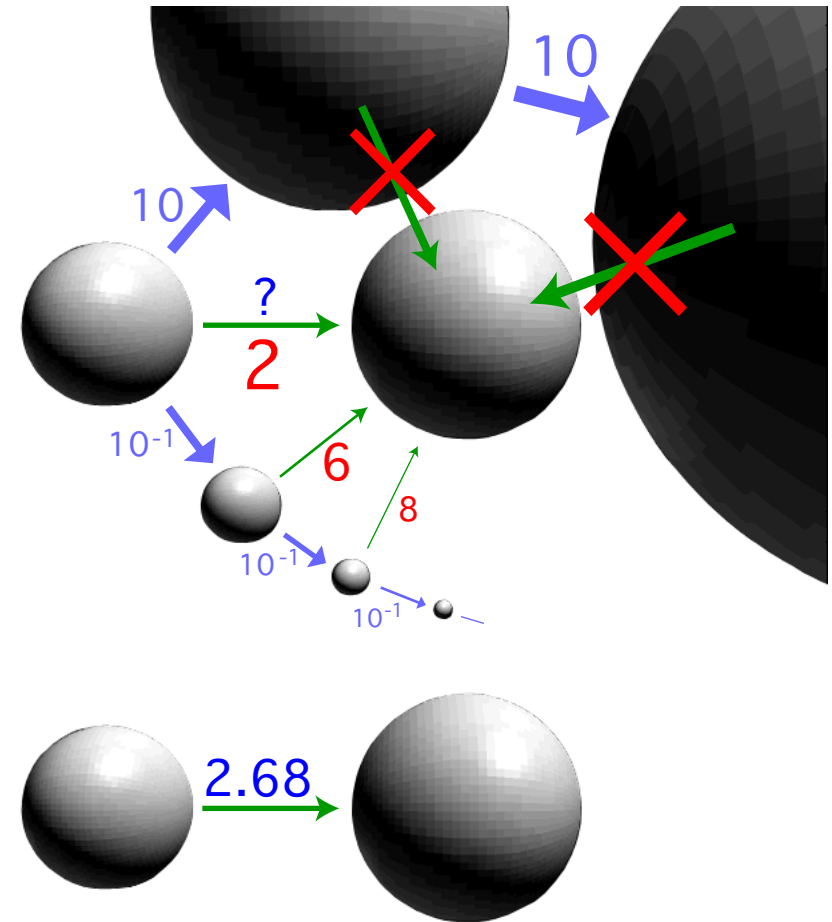
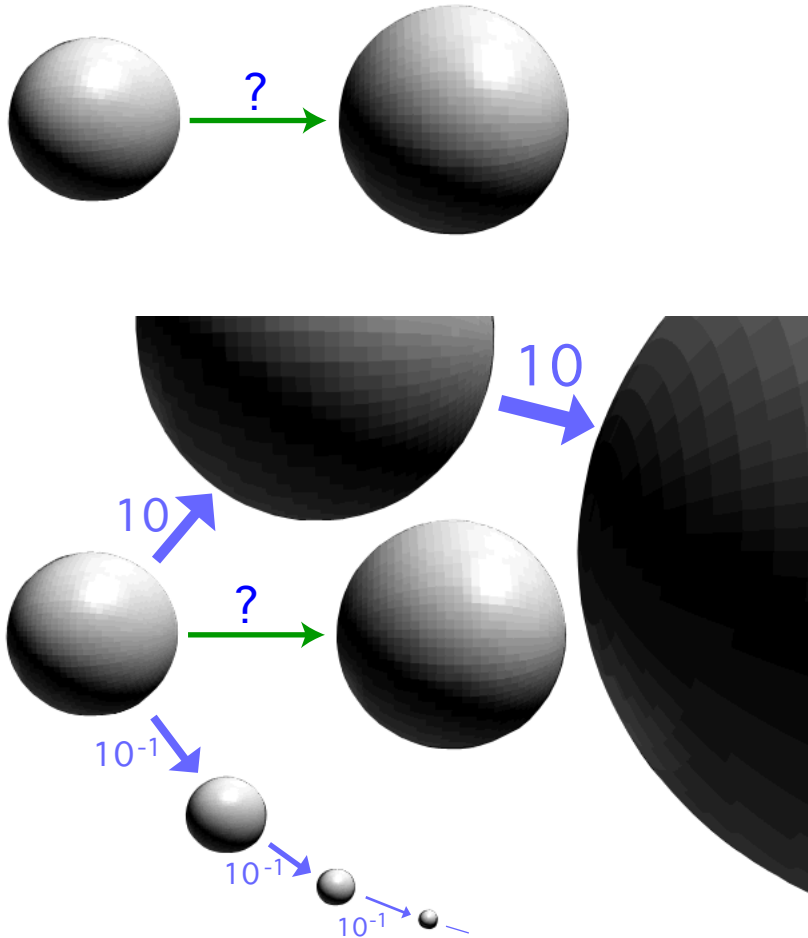
……
 単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍がいくつ⁽³⁾
 単位の 10 倍の 10 倍がいくつ⁽²⁾
 単位の 10 倍がいくつ⁽¹⁾
 単位がいくつ⁽⁰⁾
 単位の 10^{-1} 倍がいくつ⁽⁻¹⁾
 単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ⁽⁻²⁾
 単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ⁽⁻³⁾
 ……
 (「いくつ^(k)」は 0~9)

そして、つぎを倍の表現にする：

…… [いくつ⁽³⁾] [いくつ⁽²⁾] [いくつ⁽¹⁾] [いくつ⁽⁰⁾]
 . [いくつ⁽⁻¹⁾] [いくつ⁽⁻²⁾] [いくつ⁽⁻³⁾] ……

「.」は、どれが [いくつ₍₀₎] かを示すための記号で、「小数点」と呼ぶ。
 [いくつ] をただ並べただけでは、倍の表現が一意にならない。そこで、「小数点」のような工夫が必要になるわけである。

例：



この方法で表現された倍は、0～9と小数点がつくる文字列になっている。この文字列を「数」と定めて、「小数」と呼ぶ。

「数」と定める根拠は、これが倍の表現になっており、そして（この後で示されるように）「数の和・積」をこれに対して定義することができるからである。

小数による量表現は、十進数による個数表現とつぎのようにつながって

いる：

単位の $[いくつ_{(n)}] \cdots [いくつ_{(1)}] [いくつ_{(0)}] . [いくつ_{(-1)}]$
 $\cdots [いくつ_{(-m)}]$ 倍は、
 \langle 単位の 10^{-m} 倍 \rangle の $[いくつ_{(n)}] \cdots [いくつ_{(1)}] [いくつ_{(0)}] [い$
 $くつ_{(-1)}] \cdots [いくつ_{(-m)}]$ 倍。

実際、この関係を用いることで、小数の和・積の筆算法が導かれる。
 すなわち、小数の和・積は、十進数の和・積の筆算と小数点の処理を合
 わせる形で、求められるものになる。(→ 2. 小数の算法)

1.4 小数表記「(N, n)」

ここで、小数の別表記 (N, n) を導入する。

すなわち、小数が、

1. 小数点を除いたときの十進数が N
2. 小数点以下の数字の個数が n

であるとき、これを (N, n) で表す。

(N, n) からこれに対応する小数を得るには、 N の右端から n 番目の
 数の左に小数点をつける。ただし、 n が文字列 N の長さ s より大きいと
 きは、文字列 N の左端に $n - s$ 個の 0 を補う。

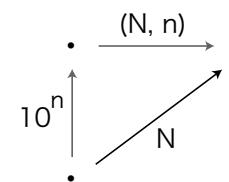
例： $12.345 = (12345, 3)$

$.00012 = (12, 5)$

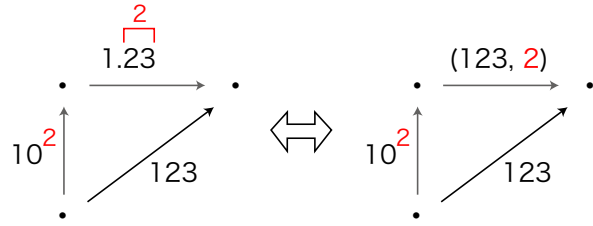
表記「 (N, n) 」を導入するのは、この表記の方が、小数に関する定義・
 命題・推論を記述しやすいからである。

例えば、「小数倍」の定義はつぎのように書ける：

十進数 N 、 n に対し、「 (N, n) 倍」をつぎの倍の可換図式で
 定義する：

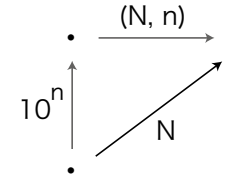


念のため、従来表記による図式と新表記による図式を対比しておく：



1.5 小数倍と分数倍の関係

小数 (N, n) 倍は、つぎの可換図式で定義される：



そしてこの図式は、同時につぎの関係を示している：

$$(N, n) \text{ 倍は, } \frac{N}{10^n} \text{ 倍}$$

2 小数の算法

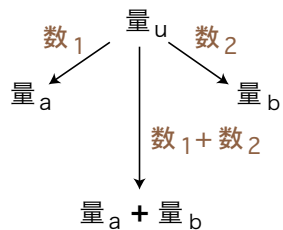
2.1 小数の和, 求和法

2.2 小数の積, 求積法

2.3 小数の商, 求商法

2.1 小数の和, 求和法

つぎが, 数の「+」の文法である:



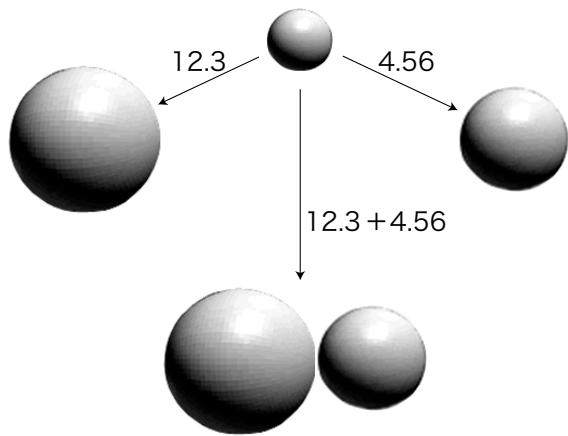
そこで, 小数の和の計算は, つぎのようになる:

和の式	$(M, m) + (N, n)$
「+」の文法	
小数の意味	<p>$p = \text{Max}(m, n)$ M': M に $p - m$ 個の 0 がついた十進数 N': N に $p - n$ 個の 0 がついた十進数 とするとき, $(M, m) = (M', p)$ $(N, n) = (N', p)$</p>

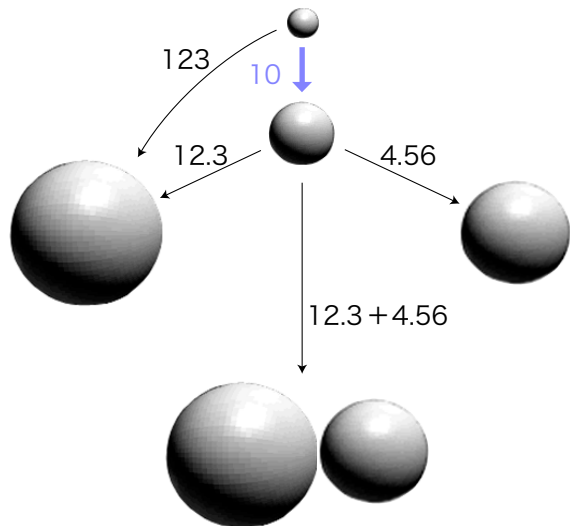
小数の意味	
自然数倍の和	
小数の意味	

そして、「 $(M, m) + (N, n) = (M' + N', p)$ 」は, 確かにわれわれの知る「小数の和の計算」である。

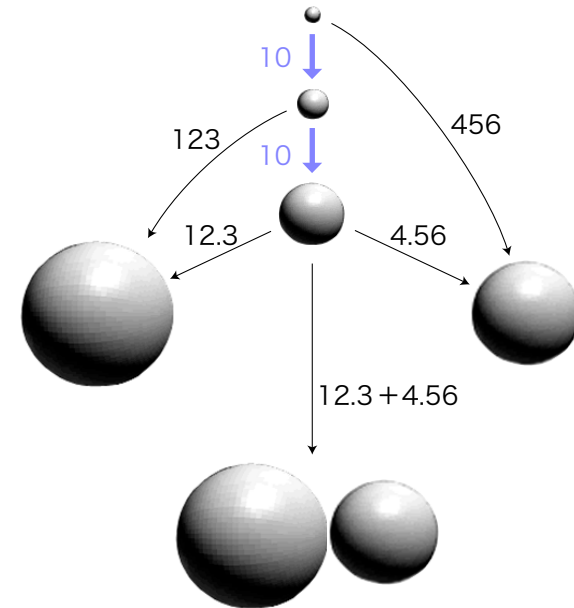
例：12.3 + 4.56



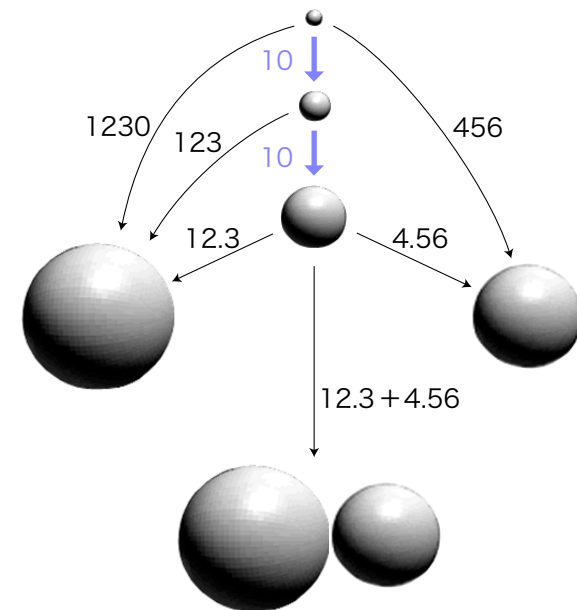
「12.3」を分析（「小数点」の文法）：



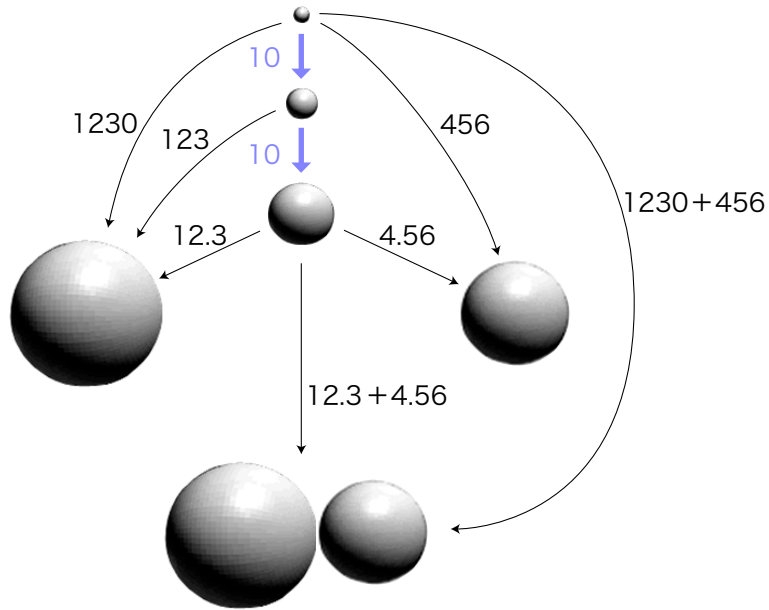
「4.56」を分析：



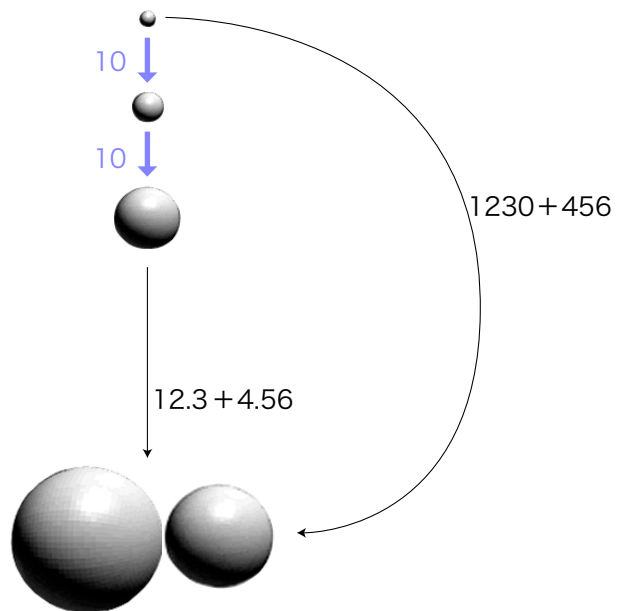
最小単位をそろえる：



自然数「+」の文法：

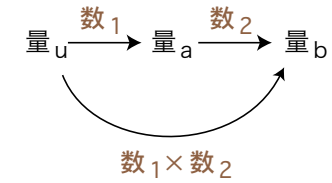


つぎの図式に到達：



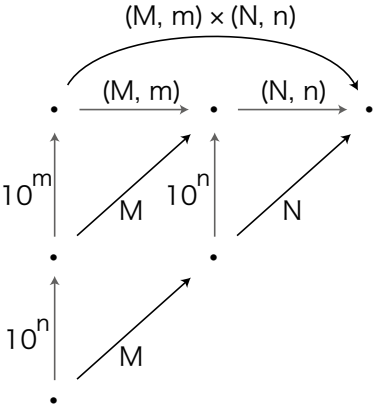
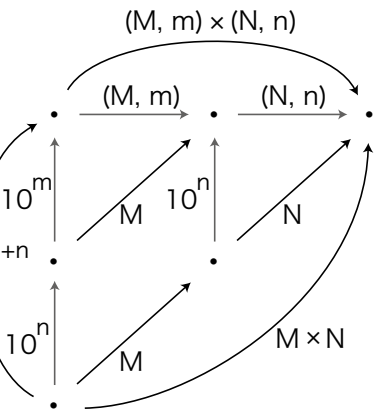
2.2 小数の積, 求積法

つぎが, 数の「×」の文法である：



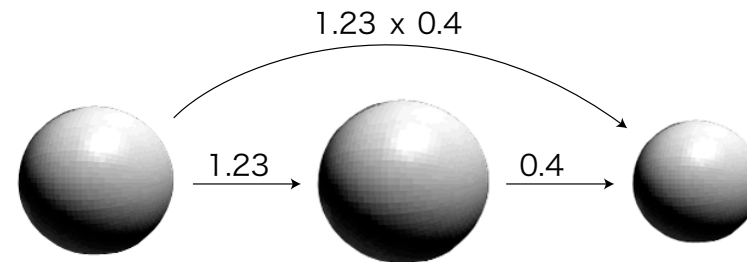
そこで, 小数の積の計算は, つぎのようになる：

積の式	$(M, m) \times (N, n)$
「×」の文法	$(M, m) \times (N, n)$
小数の意味	$(M, m) \times (N, n)$

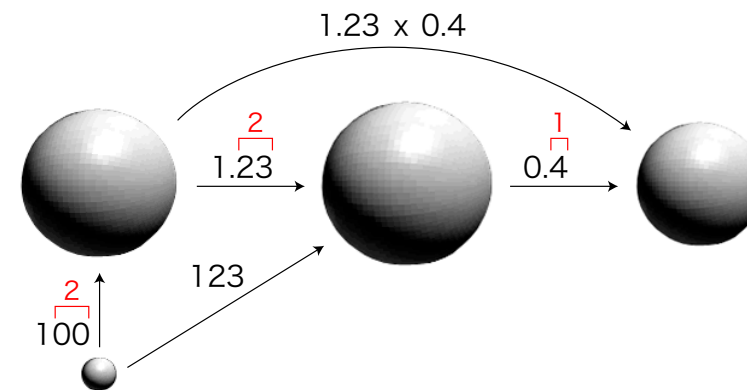
<p>2量の共約 (「通分」)</p>	
<p>「×」の文法</p>	
<p>小数の意味</p>	<p>$(M, m) \times (N, n) = (M \times N, m+n)$</p>

「 $(M, m) \times (N, n) = (M \times N, m+n)$ 」は、確かにわれわれの知る「小数の積の計算」である。

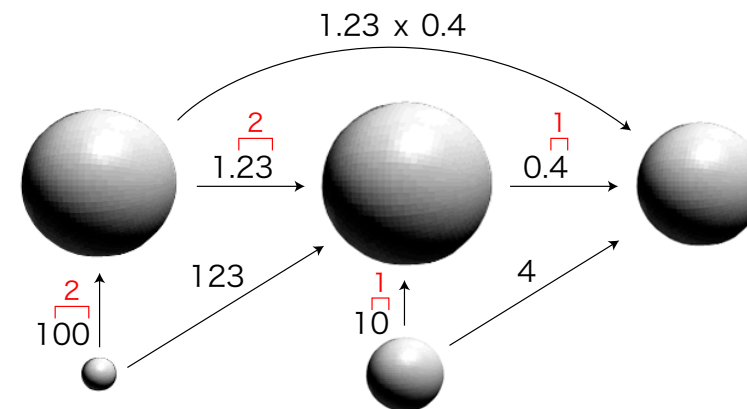
例：1.23 × 0.4



「1.23」を分析（「小数倍」の文法）：



「0.4」を分析：



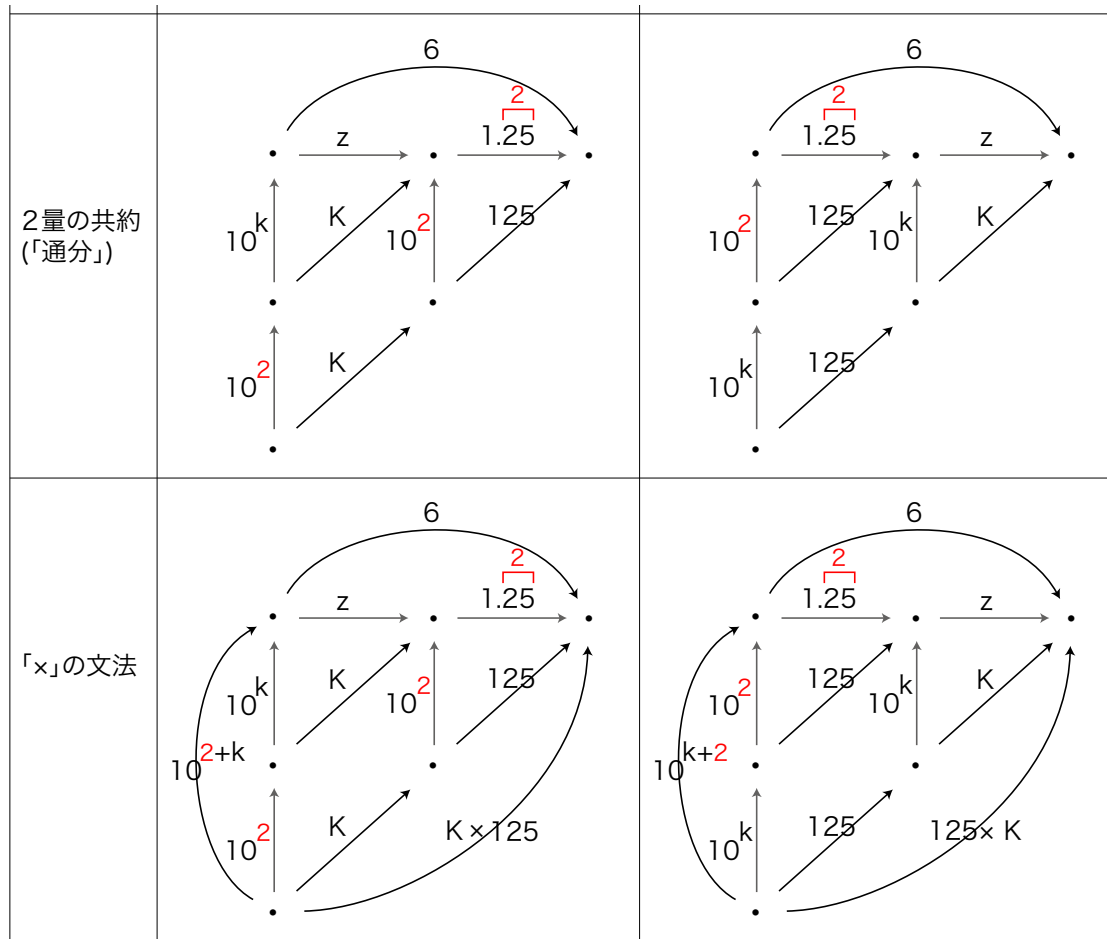
2.3 小数の商, 求商法

任意の2つの小数に対し, 商の式をつくることができる。

一方, 小数の商の式に対応する小数が存在するとは限らない。

ここでいま, $1.25 \times 4.8 = 6$ を転じた $6 \div 1.25$ の式で, 「小数のわり算」の推論を見ることにする。これは, 以下のようになる:

商の式	$6 \div 1.25$ この式が表す小数が存在するとして, それを $z = (K, k)$ とする。	
「 \div 」の文法	$z \times 1.25 = 6$	$1.25 \times z = 6$
「 \times 」の文法		
小数の意味		

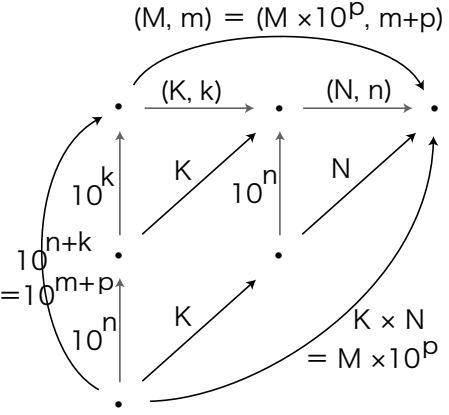
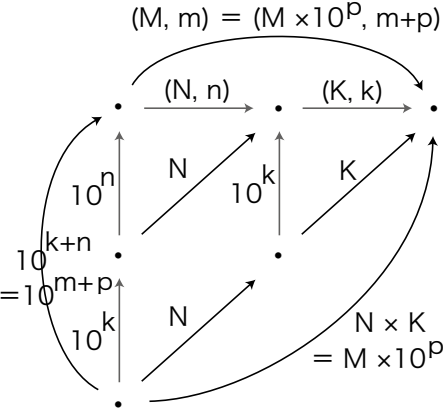


<p>小数の意味</p>		
<p>z の条件</p>	$K = \overbrace{60 \dots 0}^p \div 125 : \text{自然数}$ $k = p - 2$	
<p>z の存在</p>	$\overbrace{6000}^3 \div 125 = 48$ <p>よって, $z = (48, 3 - 2) = 4.8$</p>	

小数の一般表現を用いるならば、つぎのようになる：

<p>商の式</p>	$(M, m) \div (N, n)$ <p>この式が表す小数が存在するとして、それを (K, k) とする。</p>	
<p>「\div」の文法</p>	$(K, k) \times (N, n) = (M, m)$	$(N, n) \times (K, k) = (M, m)$
<p>「\times」の文法</p>		

<p>小数の意味</p>		
<p>2量の共約 ('通分')</p>		
<p>「×」の文法</p>		

<p>小数の意味</p>	<p>一般に, $m \leq n+k$。 そこで, $p=n+k-m$ とおくと,</p> 	<p>一般に, $m \leq k+n$。 そこで, $p=k+n-m$ とおくと,</p> 
<p>(K, k) の条件</p>	<p>$K = (M \times 10^p) \div N$: 自然数 $k = (m+p) - n$</p>	

そこで, つぎが「小数のわり算」のまとめ方になる:

$(M, m) \div (N, n)$ が小数として存在する条件は, 文字列Mの右端に何個か0をつけた形の十進数 $(M \times 10^p)$ が, 自然数の中でNによって割り切れること。

そしてこのとき,

$$(M, m) \div (N, n) = ((M \times 10^p) \div N, (m+p) - n)$$

さらに, 0追加の過程を見直すことで, 学校で指導されているつぎの「小数のわり算」に至る:

1. 必要なら一方の小数の末尾に0を加えて, 小数点以下の桁数を同じにする。

2. 小数点を無視し, 自然数の割り算をする。
3. 割り切れないときは, 被除数に0を加えていく。
4. 加えた0の数がkのとき, 求めた商の下位k桁を小数点以下の桁とする。

例: $6 \div 1.25$

1. $6.00 \div 1.25$
2. $600 \div 125$ (割り切れない)
3. $6000 \div 125 = 48$ (被除数に0を1個加えたら, 割り切れた)
4. $6 \div 1.25 = 4.8$ (48の下位1(=被除数に加えた0の個数)桁を小数点以下の桁とする)

3 小数の「数」としての位置

3.1 数の系としての自立

3.2 「有理数」の解釈

3.1 数の系としての自立

「小数」は、数の系として自立しているふうには、見えないかも知れない。特に、「分数の分母が 10^n の場合」のような見方がされるときは、そうである。

しかし、「自然数」「有理数」「複素数」を自立した数の系というのと同じ意味で、「小数」は自立した数の系である。

実際、小数全体の集合 N は、 $+$ 、 \times の算法を伴って、数の系 $(N, +, \times)$ になる。

そして、 $((N, +), \times, (N, +, \times))$ に同型な系が、小数に対する「量」の意味になるわけである。

→ 『「数とは何か？」への答え』

3.2 「有理数」の解釈

ここで述べる内容は、数学の「集合・構造・空間」および「埋め込み (embedding)」の論法に慣れている読者が対象になる。

数学では、集合に構造を導入したものを、空間と呼ぶ。

空間に対しては、「部分空間」の概念が導入される。

「部分」の意味は、「集合の部分であって、空間の構造に関してそれ自体閉じている」である。

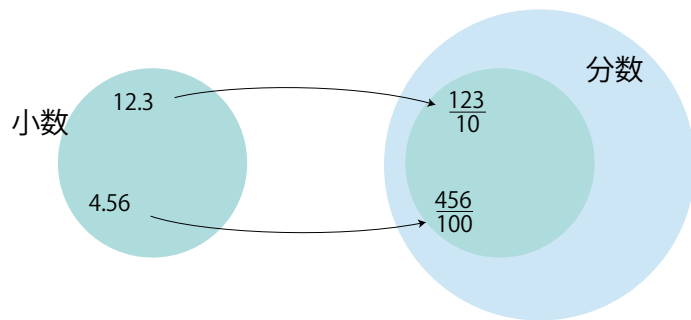
例えば、環 A に対して「 A の部分環」が考えられる。

この意味は、「 A の部分集合であって、 A の環構造を定義している二つの算法——加法と乗法——に関して閉じているもの」である。

分数全体の集合は、乗法と加法の二つの算法で定義される構造をもつ空間になる。

小数全体の集合も、乗法と加法の二つの算法で定義される構造をもつ空間になる。

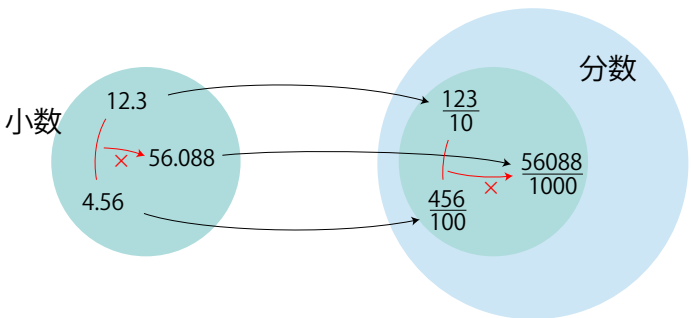
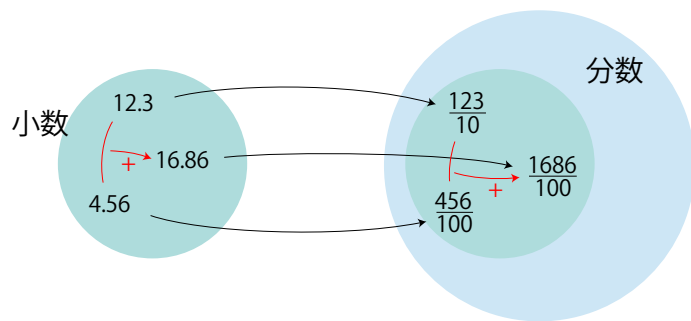
いま、「小数倍を分数倍に解釈」をやるときの小数と分数の対応で以て、小数の集合を分数の集合に埋め込む。



この集合の埋め込みは、小数の構造を合わせた埋め込みになっている。
 ——即ち、埋め込みの写像を f とするとき、小数 m, n に対し、つぎが成り立つ：

$$f(m + n) = f(m) + f(n)$$

$$f(m \times n) = f(m) \times f(n)$$



こうして、小数は、空間としての分数（「有理数」）の部分空間と見ることができる。

要点：

小数を分数（「有理数」）と見なせるのは、

1. 「小数倍を分数倍に解釈」のやり方で、小数に分数を対応させることができる。
2. 分数は有理数。

に加えて、つぎが成り立っているからである：

3. 小数と分数の対応は、《2つの小数の和・積に、対応先の2つの分数の和・積が対応する》ようになっている。

おわりに

ひとが日常的に目にする数は、十進数と小数である。これ以外の数は、学生および専門的職種の者でなければ、日常的に目にするものではない。

小数は、十進数の延長である。

「延長」は、つぎの意味である：

「量がく自然数で応ずる離散量>からく自然数では応じられない
順序稠密量>になるとき、十進数の形式を延長してこの量に応じ
る」

「小数」の数学は、この「延長」の数学である。

「小数」がわかるとは、この「延長」の数学がわかるということである。

本論考は見掛けにおいて小論であるが、それは「数と量」の通論をベースにして、論を起こしているからである。「数と量」の通論をベースにもっていない人にとっては、本論考を読むことは簡単ではないはずである。

「数と量」の通論は、つぎのテキストにあたられたい：

[『「数とは何か？」への答え』](#)

[『「数の理解」15講』](#)

宮下英明 (みやした ひであき)

1949年、北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て、現在、北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。所属学会：日本数学教育学会

図解 現職教員・教員養成コース学生&数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 数学編 (7)

「小数」の数学

2012-04-10 初版アップロード

著者・サーバ運営 宮下英明

サーバ m-ac.jp

<http://m-ac.jp/>
m@m-ac.jp

