「数」の意味から

北海道教育大学岩見沢校
宮下英明

1. わかっているようで‥‥

「わかっているつもりで実はわかってない」は, わたしたちの常だ。まともに「それは何？」と問われるまで，わかっていないことに気づかない。「数」も然り。

たとえば,「負数と負数をかけると正数になる」こと。生徒がこれをどのように受け入れるようになるかは，教師がどのように指導するかにかかっている。しかし教師自身,「負数と負数をかけると正数になる」ことをどのように理解しているのだろうか。もののたとえでこれを生徒に指導している教師は，案外，自分でもそんなレベルでこの内容をパスしている。実際,「負数と負数をかけると正数になる」ことを，もののたとえではなく，論理的に説明してみせることのできる教師は，そんなに多くはないはずだ。

そして「数」。これまでいろいろな数 (「自然数」「整数」「有理数」「実数」「複素数」等) を学校で学習してきているわけだが,「これらがひとしく“ 数 ”と呼ばれるのはなぜだろう？」と考えたことがあるだろうか。この問いを立てることは,「数」と呼ばれる形式――「自然数」「整数」「有理数」「実数」「複素数」等に共通して考えられているもの――を主題化することと同じだが, たいていは, このような問いが立つべきことに気づかずに通り過ぎてきているだろう。

しかしほんとうのところを言えば,『“ 数 ”とはそもそも何か」ということの (厳密である必要はないが) 基本的な理解は，数の指導においては避けて通れない。

2. 作用素としての数

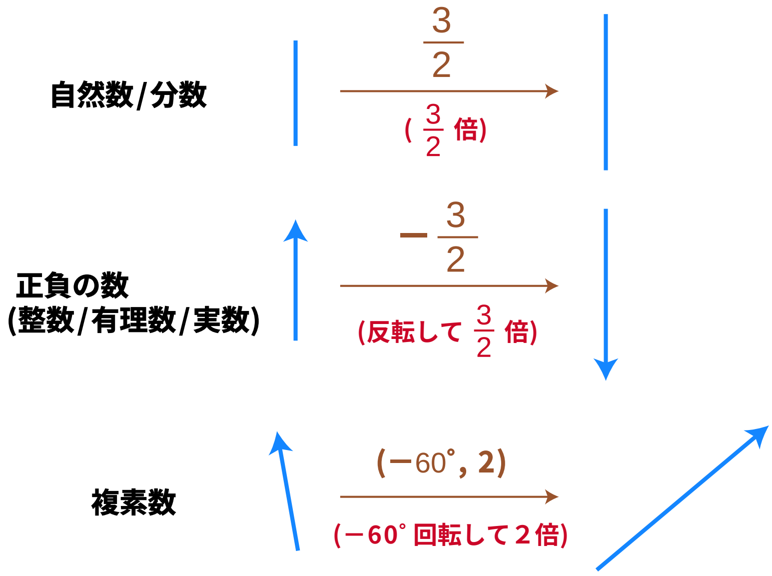
改めて見直してみるとわかるように，小学算数で登場する自然数および分数は,「２量の間の倍関係 (比) を表現する道具」であることを意義としている。例えば「3」では,

$$A \xrightarrow{\quad 3 \quad} B$$

また，この関係を「A を３倍するとB」と読むことによって，数の意義は「量に対する倍作用素」とも言い換えられる。実際 ,「作用素」が数一般の意義になる。

数がいろいろ (「自然数」「整数」「有理数」「実数」「複素数」‥‥) 存在するのは，作用の対象としていろいろなものを考えようとしてきたことによる。これは,「対象に即して具合のよい道具 (数) を開発し，対象に応じて道具 (数) を使い分ける」の実践だ。

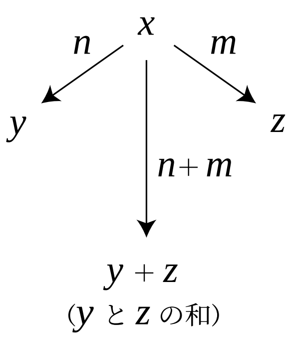
数の作用の対象は, 数が違えばどのように違ってくるか。イメージで示すと，つぎのようになる：

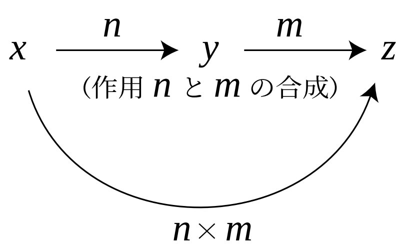


・正負の数が作用の対象とするのは，直線ベクトル（正負の方向をともなう）
・複素数が作用の対象とするのは，平面ベクトル

3. 数の「＋」と「×」

　数には，「＋」と「×」が伴っている。実際，「＋」と「×」の導入と，これに関する規則は，「数」と呼ばれる形式を構成する要素になっている。
　数ｎとｍに対する「ｎ＋ｍ」と「ｎ×ｍ」は，つぎが成り立つように定められる：





x の n 倍と x の m 倍の和は x の 何倍と考えたとき，この「何」を「$n+m$」で表す。

x の n 倍のさらに m 倍は x の 何倍と考えたとき，この「何」を「$n \times m$」で表す。

このことはまた，式の形でそれぞれつぎのように表せる：

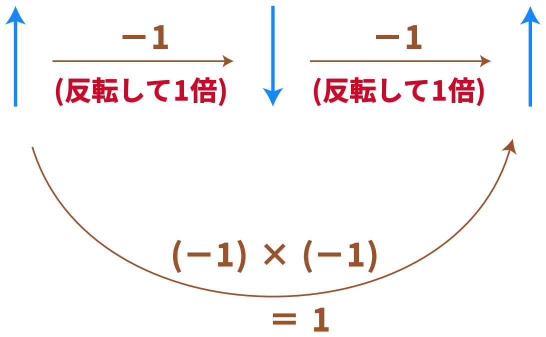
$$nx + mx = (n + m)x \qquad\qquad m(nx) = (n \times m)x$$

　２数の和，積は，自然数，整数，有理数，実数，複素数それぞれにおいて定義が異なるが，いずれにおいても，その定義は上の形が成り立つようにしたことの結果だ。
　強調するが，和，積の定義が先にあって上の関係が成り立つのではない。上の関係が成り立つように和，積が定義されるということだ。「＋」と「×」は道具としてつくられる。そ

してこの場合の道具性は，上の関係が成り立つということだ。

4．（－１）×（－１）が１になるわけ

負数倍の意味と「×」の意味は，上に述べてきた通り。そこで，(－１) ×（－１）が１になることの説明は，つぎのようになる：



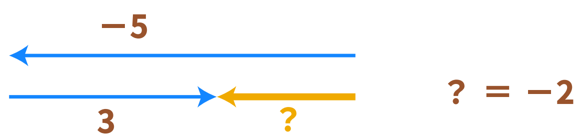
5．数を作用素として扱う授業ができるか？

数の「＋」の定義に示されているように，数が作用する対象 (小学算数での分数だったら長さ等，正負の数だったら直線上の移動等) については，「和」が考えられていることが条件になっている。この「和 (＋)」を数の「和 (＋)」と区別する形で主題化することは，小学算数，中学数学では行わない。高校のベクトル，スカラーの主題のところで，はじめて明示的に扱われることになる。

しかし，明示的に扱わないということは，簡単に混同されるということだ。この混同が教師にまで及ぶと，怪しい授業の起こることが想像される。教師に限っては，この２種類の「和 (＋)」を明確に峻別できていることが必要だ。

とは言うものの，数を作用素として扱っているような授業は，稀だろう。

実際，例えば (－５) ＋３＝ (－２) を，およそつぎのように指導していないだろうか：



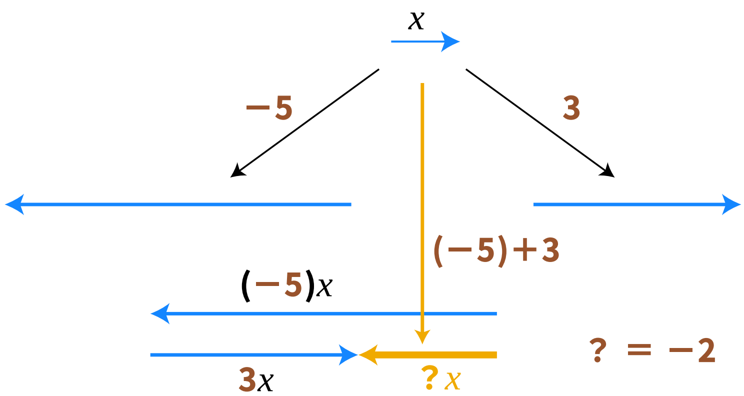
これは数とその作用対象をいっしょにしてしまうやり方だが，こんなふうにやると，この先の (－１) × (－１) の指導で困ることになる。矢線同士を掛け合わせるなどという芸当はできないから，何か方便を使ってそれで切り抜けていくことになる。

これは，小学算数のときからずっと続いている数の指導法だ。足し算，かけ算，わり算のそのときどきで，数のイメージが変更される。「同じ数に異なる意味があります」みたいな指導になってしまうわけだ。

しかし，この問題は，代案が立ちにくいという決定的な難しさがある。数を一貫して作用素として扱う指導法が立てばそれでよいわけだが，難度を高くせずにこの内容を指導するこ

とはひじょうに困難だ。

実際，先の (− 5) ＋ 3 ＝ (− 2) は，つぎの図を用いて説明されることになる：



この図は，単に込み入っているだけではなく，その中に先の図を同型で含んでいる。実際，先の図ではこの図の「x」が「1」の意識で，暗黙に考えられている。「何のことはない，ただめんどうにしただけじゃないか！」の声が読者から聞こえてきそうだ。

だがこれは，「＋」の場合だから同型を使えるのだ。数の作用の対象にも「＋」が考えられている。そして，数の「＋」は，数の作用の対象の「＋」と同型になるように作られている。(このことをここで詳しくは述べられない。しかし，「*3. 数の「＋」と「×」*」の中の「＋」の定義の図は，同時に，この同型を示す図になっている。)

しかしこの手は，「×」になるともう使えない。数の作用の対象には，数の「×」との同型を使えるような「×」はないのだ。しかし，「＋」のところで数を「大きさ」のイメージで指導してしまっている。いまから転換できないので，「数＝大きさ」のイメージを保ったまま「×」を指導する方便は何かないかと考えるわけだ。小学算数での「たて×よこ」(行列や面積を用いて) は，この方便の一つだ。

6. まとめ

以上述べてきたように，数の指導はひじょうにやっかいだ。正攻法は，難度の問題があってが立ちにくい。よって，ごまかしごまかしで進めるのも，指導法としては首肯できる点が多々ある。ただし，授業者には，(1) 主題がどのようなものであり，(2) 難しさがどこにあり，(3) いまの指導法がどのような理由から合理化されるか――ということは，しっかり理解していて欲しい。