算数・数学科教材研究——数の定式化

宮　下　英　明

On Formalization of the Concept of Number

Hideaki MIYASHITA

目　　次

1　数の定式化の方法

2　数の自己完結的定式化
- 2.1　自然数の系 $\mathbb{N}$
  - 2.1.1　条件規定の方法による $\mathbb{N}$ の定義——“ペアノの公理”
  - 2.1.2　“ペアノの公理”の読み方
  - 2.1.3　$\mathbb{N}$ の構成的定義
    - 2.1.3.1　“入れ籠型の自然数系列”
    - 2.1.3.2　自由半群からの“自然数の系”の導出
  - 2.1.4　カテゴリカルな公理系
  - 2.1.5　順序関係の導入
  - 2.1.6　加法の導入
  - 2.1.7　乗法の導入
  - 2.1.8　$\mathbb{N}$ の構造
- 2.2　数の拡張
- 2.3　“数の系”
  - 2.3.1　“数の系”であるための資格
  - 2.3.2　数の系の構造
- 2.4　$\mathbb{N}_R$
  - 2.4.1　$\mathbb{N}_R$の定義
  - 2.4.2　順序関係の導入
  - 2.4.3　加法の導入
  - 2.4.4　乗法の導入
  - 2.4.5　$\mathbb{N}_R$の構造
  - 2.4.6　$\mathbb{N}_R$の中への $\mathbb{N}$ の埋め込み
  - 2.4.7　“自然数の除法”
  - 2.4.8　“アルキメデスの公理”
- 2.5　$\mathbb{N}_D$（＝整数の系 $\mathbb{Z}$）
  - 2.5.1　$\mathbb{N}_D$の定義
  - 2.5.2　順序関係の導入
  - 2.5.3　加法の導入
  - 2.5.4　乗法の導入
  - 2.5.5　$\mathbb{N}_D$の構造
  - 2.5.6　$\mathbb{N}_D$の中への $\mathbb{N}$ の埋め込み
  - 2.5.7　“自然数の減法”
  - 2.5.8　乗法の解釈
- 2.6　$(\mathbb{N}_D)_R$（＝有理数の系 $\mathbb{Q}$）
  - 2.6.1　$(\mathbb{N}_D)_R$の定義
  - 2.6.2　順序関係の導入
  - 2.6.3　加法の導入
  - 2.6.4　乗法の導入
  - 2.6.5　$(\mathbb{N}_D)_R$の構造
  - 2.6.6　$(\mathbb{N}_D)_R$の中への$\mathbb{N}_D$の埋め込み
- 2.7　$(\mathbb{N}_R)_D$
  - 2.7.1　$(\mathbb{N}_R)_D$の定義
  - 2.7.2　$(\mathbb{N}_R)_D$の中への$\mathbb{N}_R$の埋め込み
  - 2.7.3　$(\mathbb{N}_R)_D$と$(\mathbb{N}_D)_R$の同型性
- 2.8　“閉じた”拡張
  - 2.8.1　$(\mathbb{N}_R)_R$と$\mathbb{N}_R$の同型性
  - 2.8.2　$(\mathbb{N}_D)_D$と$\mathbb{N}_D$の同型性
  - 2.8.3　$((\mathbb{N}_R)_D)_R$と$\mathbb{N}_{RD}$の同型性
  - 2.8.4　$((\mathbb{N}_D)_R)_D$と$\mathbb{N}_{RD}$の同型性

3　量に随伴する数
- 3.1　数の契機としての量
- 3.2　“量”の概念の領分

1990年4月16日受理

3.3　“量”の一般的形式
3.4　“量”に対する三つの二分法
3.5　内算法＋が定義されている場合
3.5.1　(Q, ≦, ＋) の条件
3.5.2　“数の系”としての (Q, ≦, ＋)
3.5.3　“数の系”の構成としての (Q, ≦, ＋) の構成
3.5.4　離散量からの稠密量の構成と，稠密量からの離散量の導出
3.5.5　“比”の系
3.5.6　系((Q, ≦, ＋), ($\mathcal{N}$, ≦, ＋, ×), $_\times$)
3.5.7　“差”の系
3.5.8　系 ((Q, ≦), ((D, ≦, ＋), ($\mathcal{N}$, ≦, ＋, ×), $_\times$), $_+$)
3.6　内算法＋が定義されていない場合
3.6.1　(Q, ≦) の条件
3.6.2　“差”の系
3.6.2.1　(Q, ≦) が離散の場合
3.6.2.2　(Q, ≦) が稠密の場合
3.6.3　系((Q, ≦), ((D, ≦, ＋), ($\mathbb{N}_{DR}$, ≦, ＋, ×), $_\times$), $_+$)
3.7　量の一般形((Q, ≦), ((D, ≦, ＋), ($\mathbb{N}_{DR}$, ≦, ＋, ×), $_\times$), $_+$)

1　数の定式化の方法

数の定式化の仕方として，ここでは，一つに，《対象を明示的に構成する》と《条件で対象を規定する》のタイプ分けを考え，そしてもう一つに，《それ自体で完結しているものとして定式化する》と《量に随伴するもの（量の“係数”）として定式化する》のタイプ分けを考えることにする。このとき，数の定式化は，4通りに考えられる：

	構　成	条件規定
自己完結		
量に随伴		

2　数の自己完結的定式化

2.1　自然数の系ℕ

2.1.1 条件規定の方法によるℕの定義——“ペアノの公理”

自然数の系は，日常用語の中の“系列”の数学化である。実際，自然数の系の定義は，そのまま“系列”の定義である。

自然数の系は，“ペアノ(註)の公理”という形で定義される。

自然数の系は，先ず，集合ℕと，ℕの一つの要素1と関数f：ℕ⟶ℕの組

$$(\mathbb{N},\ 1,\ f)$$

である。そしてこれについて，以下のことが成立している：

1°　$f(x)=1$となるℕの要素xは存在しない；

2°　ℕの要素x，yについて$f(x)=f(y)$ならば$x=y$；

3°　ℕの部分集合ℕ′は，つぎの条件を満たすとき，実はℕと一致している：

1がℕ′の要素になっている；

xがℕ′の要素のとき，$f(x)$もℕ′の要素．

どうしてこれが“系列”の数学化になっているのか。つぎに，このことを見ていくとしよう。

（註）Peano, G. : 1858－1932

2.1.2　“ペアノの公理”の読み方

先ず，“系列”の図式

$$\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\cdots\cdot$$

に対し，これの項全体の集合が集合ℕである。そして先頭の項が1である。fは，各項にその直後の項(“後者(successor)”)を対応させる関数である。

fが対応一般（一つの要素に複数の要素が対応することを許す）ではなく，一意対応（一つの要素に一つの要素が，しかもただ一つの要素が，対応する）としての関数であるという点は，本質的である。“系列”の図式は，

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad \nearrow \bigcirc\to\bigcirc\to\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\to\bigcirc\to\bigcirc \\ \qquad\qquad\quad \searrow \bigcirc\to\bigcirc\to\cdots\cdots \end{array}$$

のように枝分かれするものではない。この枝分れを禁止するのが，fが一意対応であるという条件である。

“何の後でもない”が“先頭”の意味である。そこで，条件1°によって，1を先頭として定義している。

しかしここで，先頭が一つに限るのかどうかが，心配になる。

他にも先頭があったとしよう。このとき，別々の先頭から出発する列は先でつながることはない。というのも，条件2°によって

$$\begin{array}{l} \cdots\cdots\to\bigcirc\to\bigcirc \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bigcirc\to\bigcirc\to\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\to\bigcirc\to\bigcirc \nearrow \end{array}$$

の形が禁止されているからである。そこで可能性として残るのは，$\mathbb{N}$が互いに独立した複数の系列で成るという状態である。しかしこの状態は，条件3°によって禁止されている。実際，

$$\left.\begin{array}{ll} ①\to\bigcirc\to\cdots\cdots & :\mathbb{N}' \\ \\ \bigcirc\to\bigcirc\to\cdots\cdots & \end{array}\right\} \quad \mathbb{N}$$

のように$\mathbb{N}'$をとると，$\mathbb{N}'$は3°の中の$\mathbb{N}'$の条件を満たしているから$\mathbb{N}'=\mathbb{N}$でなければならない。結局，$\mathbb{N}$は一本の系列でなければならないことになる。

また条件2°は，系列がどこかで終わる状態

$$\cdots\cdots\to\bigcirc\to\bigcirc\to\bigcirc$$

を禁止することにも効いている。実際，

$$\cdots\cdots\to\bigcirc\to\overset{y}{\bigcirc}\to\overset{x}{\bigcirc}$$

とすると，これは$x=f(y)$かつ$x=f(x)$の場合である。ところがこのときには，条件2°より$x=y$でなければならず，$x\neq y$に反する。

条件3°は，“数学的帰納法の公理”と呼ばれる。実際，命題関数$P(x)$に対する命題

“すべての自然数xに対し$P(x)$は真”

は，$\mathbb{N}'=\{x \mid x\in\mathbb{N}$かつ$P(x)\}$とおいたときの命題

$$“\mathbb{N}'=\mathbb{N}”$$

と同じ。そしてこれを条件3°を適用して証明するとき，条件3°を“数学的帰納法の公理”として用いたということになる。

いま，整数$n\geqq 0$ (註1) に対し，$f^n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$を

$$f^n=\begin{cases} f\text{の}n\text{回の合成} & (n>0) \\ \text{恒等関数} & (n=0) \end{cases}$$

で定義するとしよう。このとき，$f^n(1)$ $(n\geqq 0)$の全体が$\mathbb{N}$である (註2)。

そしてこのとき，生活実践の中の“1”，“2”，“3”，$\cdots\cdots$に対して，“$f^0(1)$，$f^1(1)$，$f^2(1)$，$\cdots\cdots$の名”という解釈が，改めて立つことになる。

（註1）　ここでの“整数$n\geqq 0$”は，目下自然数を論じているところの言語（“メタ言語”）に属する。したがって，後で，自然数の拡張としての整数が登場するが，循環論法ではない。

（註2）　条件3°の直接の適用。

2.1.3　$\mathbb{N}$の構成的定義

2.1.3.1　“入れ籠型の自然数系列”

集合論に依るとき，数の構成は自然数の構成から始めることができる。

即ち，集合論の対象ϕ（“空集合”）から系列：

$\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\},\cdots\cdots$

を構成し，この項の集合を$\mathbb{N}$，最初の項を1とする。そして写像$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$を，各項にその後の項を対応させるものとして定義する。

組（$\mathbb{N}$，1，f）は，確かにペアノの公理を満たしている。

この系列では各項が後の項の要素になっているが，このことを指して“入れ籠型の自然数系

列”という言い方がされる。またこの場合，n番目の項になる集合は，n個の要素からなっている。

2.1.3.2 自由半群からの“自然数の系”の導出

Qを，対象Uで生成される自由半群——算法を＋で表わす——とする。

各$X \in Q$に対し，$X+U$をXの“後者”と定めるとき，Qはペアノの公理を満たす。さらに，＋は，“自然数の系”としてのQにおいて定義される加法＋(後述（§2.1.6)）と一致する。

2.1.4　カテゴリカルな公理系

われわれは自然数$\mathbb{N}$を，色々あるものとしてではなく，ただ一つのものとして意識している。したがって，ペアノの公理による“自然数の定義”が真に自然数の定義になっているためには、それによって自然数が一意に定まるのでなければならない。

ここで“ただ一つ”とは，“同型の意味でただ一つ”ということである。

自然数の系の同型は，つぎのように定義する。即ち，ペアノの公理を満たす二つの系（$\mathbb{N}$，1，f）と（$\hat{\mathbb{N}}$，$\hat{1}$，$\hat{f}$）が同型であるとは，$\mathbb{N}$と$\hat{\mathbb{N}}$の間の１対１対応$h: \mathbb{N} \longrightarrow \hat{\mathbb{N}}$で条件：

1°　　　$h(1) = \hat{1}$

2°　図式：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "h"] \\
\hat{\mathbb{N}} \arrow[r, "\hat{f}"'] & \hat{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

は可換

を満たすものが存在すること[註]。そして実際，このようなhは存在する——かつ

$$h(f^n(1)) = \hat{f}^n(\hat{1})$$

で定義されるものに限る。

一般に，ある公理系で定義されるところのものが“同型の意味で一つだけ”であるとき，その公理系は“カテゴリカル”であると言われる。ペアノの公理系は，カテゴリカルな公理系の一つの例になっている。

（註）“コピーh：（$\mathbb{N}$，1，f）$\longrightarrow$（$\hat{\mathbb{N}}$，$\hat{1}$，$\hat{f}$）”の概念の定式化は，このようになる。

2.1.5　順序関係の導入

x，$y \in \mathbb{N}$の間の関係$x \leqq y$を，ある整数$n \geqq 0$に対して$f^n(x) = y$となることと定義する。また，$x < y$を，$x \leqq y$かつ$x \neq y$のことと定義する。

$\leqq$は，$\mathbb{N}$の上の順序関係——実際には，全順序関係——になる[註]。

なお，“入れ籠型”の自然数系列では，

$$x < y \Longleftrightarrow x \in y$$

である。

（註）順序関係とは，以下の条件で定義される関係$\leqq$のこと：

1°　$x \leqq x$　　（反射法則）；

2°　$x \leqq y$かつ$y \leqq x$ならば$x = y$　　（反対称法則）；

3°　$x \leqq y$かつ$y \leqq z$ならば$x \leqq z$　　（推移法則）.

さらに，条件

4°　任意のx，yに対し，$x \leqq y$あるいは$y \leqq x$　　（比較可能）

が加わった順序関係は，特に全順序関係，あるいは線形順序関係，と呼ばれる。

$\mathbb{N}$の要素に対してここで定義した$\leqq$が全順序関係であることの証明は，つぎのようになる（証明の中の“＋”や“－”は，証明の言語（“メタ言語”）に属する）：

$f^0(x) = x$より，$x \leqq x$。

$f^m(x) = y$かつ$f^n(y) = x$のとき，$f^{m+n}(x) = x$。もし$m+n \neq 0$であれば，$f^1(x)$，$\cdots$，$f^{m+n}(x) = x$のどれかが1。しかしこのときには，$f(W) = 1$となる$\mathbb{N}$の要素Wが存在することになり，$\mathbb{N}$の条件１°に反する。したがって，$m+n=0$，即ち$m=n=0$。結局，$x=y$。

$f^m(x) = y$かつ$f^n(y) = z$のとき，$f^{m+n}(x) = z$，よって，$x \leqq z$。

$\mathbb{N}$は$f^n(1)$（$n \geqq 0$）の全体と一致する。一方$m \leqq n$の

とき，$f^{n-m}(f^m(1))=f^n(1)$より，$f^m(1)\leqq f^n(1)$。

2.1.6　加法の導入

生活実践の中の自然数の加法は，つぎのような形に数学化される：

1°　$x+1=f(x)$　；

2°　$x+(y+1)=(x+y)+1$

（言い換えると，$x+f(y)=f(x+y)$）.

このとき，例えば4＋3の計算はつぎのようになる：

$$\begin{aligned}4+3&=4+(2+1)=(4+2)+1\\&=(4+(1+1))+1=((4+1)+1)+1\\&=(5+1)+1=6+1=7\end{aligned}$$

（あるいは，$=4+f(2)=f(4+2)=f(4+f(1))$
$=f(f(4+1))=f(f(f(4)))=f(f(5))=f(6)=7$）

加法＋は，順序関係≦とつぎのように関係している：《$x\leqq y$であるためには，$x+z=y$となるzの存在することが必要十分》

2.1.7　乗法の導入

生活実践の中の自然数の乗法は，自然数の累加である。ℕへの乗法の導入も，これと正確に対応する形でなされる。

即ち，つぎのように内算法×（“乗法”）が定義される：

1°　$x\times 1=x$；

2°　$x\times(y+1)=x\times y+x$.

このとき，例えば4×3の計算はつぎのようになる：

$$\begin{aligned}4\times3&=4\times(2+1)=(4\times2)+4\\&=(4\times(1+1))+4=((4\times1)+4)+4\\&=(4+4)+4=8+4=12\end{aligned}$$

2.1.8　ℕの構造

ℕは，＋，×のそれぞれについて可換半群をなし，＋と×の間には分配法則が成り立つ。

ℕは，≦と＋に関して順序半群になる。即ち，m，n，$p\in\mathbb{N}$についてつぎの関係が成り立つ：

$$m\leqq n \Longrightarrow m+p\leqq n+p.$$

また，≦と＋の間には，

$m<n \Longleftrightarrow$（$m+p=n$となるpが存在する）

が成り立つ。

半群ℕは｛1｝から生成される。特にℕの順序位相は離散である。

2.2　数の拡張

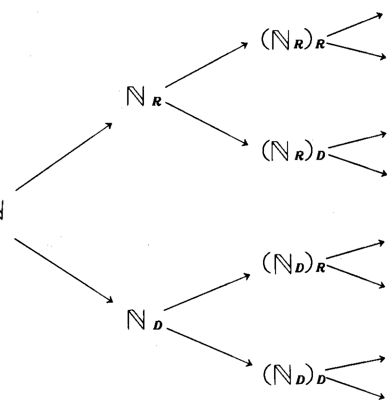
数学では，数概念を，自然数から出発する“数の構成”という形をとって，

自然数 ⟶ 整数 ⟶ 有理数
⟶ 実数 ⟶ 複素数

のように拡張する。このときの自然数の定義，自然数以下の“数の構成”は，見掛けは全く形式的な処理のようになっているが，少なくとも有理数がゴールの場合には，生活実践において数の機能を拡張するやり方と，きちんと対応している。

生活実践での数の機能拡張は，二つの目的でなされる。一つは，量の比（倍）の表現とそれを計算にのせることであり，そしてもう一つは，量の差の表現とそれを計算にのせることである。

この拡張に“数の構成”を直接対応させるとき，それは



のようになる筈である。ここでℕは自然数の系を表わし，（　）$_R$は“比”の表現に対応する数拡張，（　）$_D$は“差”の表現に対応する数拡張を表わすものとする（Rは比“Ratio”の‘R’，Dは差“Difference”の‘D’のつもり）。

この拡張は無限に続くことになるが，結論を先に言えば，$(\mathbb{N}_R)_R$は$\mathbb{N}_R$と，$(\mathbb{N}_D)_D$は$\mathbb{N}_D$と，$(\mathbb{N}_R)_D$は$(\mathbb{N}_D)_R$と，$((\mathbb{N}_R)_D)_R$は$(\mathbb{N}_R)_D$と，そし

て$((\mathbb{N}_D)_R)_D$は$(\mathbb{N}_R)_D$と，それぞれ同一視できることになり，結局この拡張は

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N}_R \arrow[dr] & \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{N}_{RD} \\ & \mathbb{N}_D \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

のように閉じることになる。――ここで，$\mathbb{N}_{RD}$は$(\mathbb{N}_R)_D$ $(=(\mathbb{N}_D)_R)$を表わすものとする。そして，$\mathbb{N}_D$が整数の系$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}_{RD}$が有理数の系$\mathbb{Q}$ということになる。

$\mathbb{N}_R$についての言い回しは“正の有理数の系”ということになる。しかし，有理数$\mathbb{N}_{RD}$が$\mathbb{N}_R$の後に出て来るものであること，$\mathbb{N}_R$が整数の$\mathbb{N}_D$と並ぶ身分であること，そして$\mathbb{N}_R$が算数科教材では“分数”として独立した主題を成していることを考えれば，本来，これにも何か一つの名を与え，見掛けともども独立の系として確立しておくべきであろう。

2.3　“数の系”

2.3.1　“数の系”であるための資格

“数（の系）の拡張”の主題化は，“数の系”の規準の主題化を含んでいる。実際，“数の系”の規準がなければ，“数（の系）の拡張”を言うことはできない。

“数の拡張”の合理化の仕方の一つに，“形式不易の原理”（Hankel(註)）がある。そして この場合，“数の系”の規準が，“形式不易の原理”の言い回しの中に現われているところの“形式”として，与えられる。それは，つぎのようになる：

1°　$a+b=b+a$

2°　$(a+b)+c=a+(b+c)$

3°　$a\times b=b\times a$

4°　$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

5°　$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$\mathbb{N}$はこの意味での数の系になっている。

またこの意味では，例えば，$\mathbb{Z}$（後述）の部分$\mathbb{N}\cup\{0\}$に$\mathbb{Z}$の構造の制限を考えたものも，数の系ということになる。

（註）19世紀末のドイツの数学史家。

2.3.2　数の系の構造

“数の拡張”

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N}_R \arrow[dr] & & & \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{N}_{DR}\ (\text{“}\mathbb{Q}\text{”}) \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{C} \\ & \mathbb{N}_D\ (\text{“}\mathbb{Z}\text{”}) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

では，数の系の構造が拡張されることになる。

数の系Eの構造は，≦で定義される構造（順序構造）および＋，×のそれぞれで定義される構造（代数的構造）の組合せで，色々に考えられる。

どのような構造を考えているかを，ここでは$(E,\ \leqq)$，$(E,\ +,\ \times)$，$(E,\ \leqq,\ +)$のような表記によって表わすとしよう。

2.4　$\mathbb{N}_R$

2.4.1　$\mathbb{N}_R$の定義

$\mathbb{N}_R$に対応する生活実践は，量の比の処理である。

比の表現“自然数：自然数”では，同じ比に対して異なる表現が可能である。しかし同時に，《$m:n$と$m':n'$が同じ比の表現であるためには，$m\times n'=m'\times n$であることが必要十分》のきまりがある。

“比”の数学化は，この

“先ず《比》，そして《比を表現する自然数の対》，さらに《同じ比を表現する自然数の対の間に成立するきまり》”

の順序を逆立ちさせる。即ち，《同値な表現のきまり》で自然数の対を類別し，このときの類全体の集合として（“比の集合”）$\mathbb{N}_R$を定義する。詳しく言うと，以下のようになる。

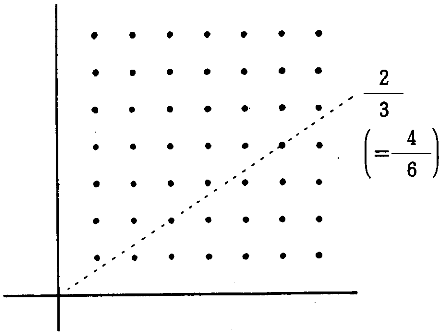
$\mathbb{N}$に対し，これの集積合$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$（自然数の対全体の集合）をとる。$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$の要素の間の関係～を

$$(m,\ n)\sim(m',\ n')$$
$$\Longleftrightarrow\ m\times n'=m'\times n$$

で定義するとき，～は$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$の上の同値関係

(ℕの類別を実現する関係)[註1]になっている。ℕ×ℕを～で類別して得られる類の集合を$\mathbb{N}_R$と定義する。

ℕ×ℕを座標平面の形に表現された$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の部分とみなすとき，つぎのように並ぶ点の各類が，$\mathbb{N}_R$の要素になる：



$\mathbb{N}_R$の要素xはℕの要素の対の類であるが，この類に対(m, n)が属するとき，mとnの名"m"，"n"[註2]を用いてxを"$m:n$"あるいは"n/m"，"$\frac{n}{m}$"と表現する。

(註1) 一般に，集合Xの上の同値関係～とは，つぎの条件を満たす二項関係のこと：

1° $x\sim x$

2° $x\sim y \Longrightarrow y\sim x$

3° $x\sim y$かつ$y\sim z \Longrightarrow x\sim z$

(註2) 厳密には，このように，〈記述の上で存在を表現している記号〉と〈この存在の名〉を，区別しなければならない。

2.4.2 順序関係の導入

x，$y\in\mathbb{N}_R$に対し，$x=\frac{s}{r}$，$y=\frac{t}{r}$となるr，s，$t\in\mathbb{N}$が存在する。このとき，$x\leqq y$を$s\leqq t$で定義する。――x，yを上のように表現したときの条件$s\leqq t$は，r，s，tの取り方に依存していない[註]から，この定義は意味をもつ。

$\leqq$は，$\mathbb{N}_R$の上の全順序関係になっている。また，$\mathbb{N}_R$は$\leqq$に関して稠密である。

(註) $x=\frac{s}{r}=\frac{s'}{r'}$，$y=\frac{t}{r}=\frac{t'}{r'}$のとき，$(s\times t')\times(r\times r')=(s\times r')\times(t'\times r)=(r\times s')\times(t\times r')=(s'\times t)\times(r\times r')$，よって$s\times t'=s'\times t$。したがって，$s\leqq t$と$s'\leqq t'$は同値。

2.4.3 加法の導入

x，$y\in\mathbb{N}_R$に対し，$x=\frac{s}{r}$，$y=\frac{t}{r}$となるr，s，$t\in\mathbb{N}$が存在する。このとき，

$$x+y=\frac{s+t}{r}$$

と定義する。――x，yを上のように表現したときの$\frac{s+t}{r}\in\mathbb{N}_R$は，$r$，$s$，$t$の取り方に依存していない[註]から，この定義は意味をもつ。

(註) $x=\frac{s}{r}=\frac{s'}{r'}$，$y=\frac{t}{r}=\frac{t'}{r'}$のとき，$(s+t)\times r'=(s\times r')+(t\times r')=(r\times s')+(r\times t')=r\times(s'+t')$，よって，$\frac{s+t}{r}=\frac{s'+t'}{r'}$。

2.4.4 乗法の導入

x，$y\in\mathbb{N}_R$に対し，

$$x=\frac{s}{r}\qquad y=\frac{t}{s}$$

となるr，s，$t\in\mathbb{N}$が存在する。このとき，

$$x\times y=\frac{t}{r}$$

と定義する。――x，yを上のように表現したときの$\frac{t}{r}\in\mathbb{N}_R$は，$r$，$s$，$t$の取り方に依存していないから，この定義は意味をもつ。

2.4.5 $\mathbb{N}_R$の構造

$\mathbb{N}_R$は＋について可換半群，×について可換群をなし，＋と×の間には分配法則が成り立つ――特に，$\mathbb{N}_R$は導入した＋，×に関して"数の系"(§2.3.1)になっている。

$x\in\mathbb{N}_R$の×に関する逆元をx^{-1}で表わす。

$\mathbb{N}_R$は，$\leqq$と＋に関して順序半群になる。即ち，x，y，$z\in\mathbb{N}_R$についてつぎの関係が成り立つ：

$$x\leqq y \Longrightarrow x+z\leqq y+z.$$

2.4.6 $\mathbb{N}_R$の中へのℕの埋め込み

写像i：$\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}_R$を

$$i\ (n)=\frac{n}{1}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

で定義するとき，iは1対1で，

$$m \leqq n \Longrightarrow i(m) \leqq i(n)$$
$$i(m+n)=i(m)+i(n)$$
$$i(m \times n)=i(m) \times i(n)$$

が成り立つ。そこでこのiによって，($\mathbb{N}$, ≦, ＋, ×)を($\mathbb{N}_R$, ≦, ＋, ×) の部分 (i ($\mathbb{N}_R$), ≦, ＋, ×) と同一視できることになる。言い換えると，iによって，($\mathbb{N}$, ≦, ＋, ×) は ($\mathbb{N}_R$, ≦, ＋, ×) に埋め込まれる。またこの意味で，$\mathbb{N}_R$は$\mathbb{N}$の拡張である。

$n \in \mathbb{N}$の表記を，$i(n) \in \mathbb{N}_R$の表記に流用する。

このとき，1は$\mathbb{N}_R$の単位元。また，$n \in \mathbb{N}$に対し

$$n=n/1, \quad n^{-1}=1/n$$

2.4.7　“自然数の除法”

$\mathbb{N}_R$においては，任意のm, $n \in \mathbb{N} \in \mathbb{N}_R$に対し，$m \times x=n$となる$x$が存在し，実際$x=n/m$である(註)。

$\mathbb{N}$において，$m \times p=n$となるpをn/m（“$n \div m$”）で表わす。このときのn/mは常には定義されない。しかし定義されるときには，$\mathbb{N}$の$\mathbb{N}_R$への埋め込みにおいて，$\mathbb{N}_R$の要素n/m──(m, n) の類として定義されるところのn/m──と一致することになる。

以上の意味で，“$\mathbb{N}$の$\mathbb{N}_R$への拡張は，自然数同士の除法をいつも可能であるようにする拡張”という言い方がされることがある。

（註）定義より，

$$m \times \frac{n}{m}=\frac{m}{1} \times \frac{n}{m}=\frac{n}{1}=n$$

2.4.8　“アルキメデスの公理”

“アルキメデスの公理”と呼ばれるつぎのこと（“塵も積もれば山となる”）が成り立つ：

任意のx, $y \in \mathbb{N}_R$に対し，$x \times n > y$となる$n \in \mathbb{N}$が存在する.

2.5　$\mathbb{N}_D$（＝整数の系$\mathbb{N}$）

2.5.1　$\mathbb{N}_D$の定義

$\mathbb{N}_D$に対応する生活実践は，量の差の処理である。

差の表現“自然数－自然数”では，同じ差に対して異なる表現が可能である。しかし同時に，《$n-m$と$n'-m'$が同じ差の表現であるためには，$m+n'=m'+n$であることが必要十分》のきまりがある。

差の数学化は，この

“先ず《差》，そして《差を表現する自然数の対》，さらに《同じ差を表現する自然数の対の間に成立するきまり》”

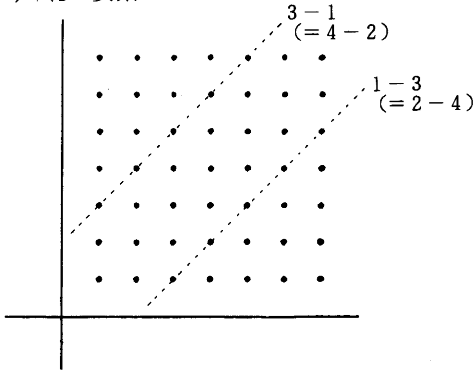
の順序を逆立ちさせる。即ち，《同値な表現のきまり》で自然数の対を類別し，このときの類全体の集合として（“差の集合”）$\mathbb{N}_D$を定義する。詳しく言うと，以下のようになる。

$\mathbb{N}$に対し，これの積集合$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$（自然数の対全体の集合）をとる。$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$の要素の間の関係～を

$$(m,\ n) \sim (m',\ n') \Longleftrightarrow m+n'=m'+n$$

で定義するとき，～は$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$の上の同値関係（$\mathbb{N}$の類別を実現する関係）になっている。$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$を～で類別して得られる類の集合を$\mathbb{N}_D$と定義する。

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$を座標平面の形に表現された$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$の部分とみなすとき，つぎのように並ぶ点の各類が，$\mathbb{N}_D$の要素になる：



$\mathbb{N}_D$の要素xは$\mathbb{N}$の要素の対の類であるが，この類に対 (m, n) が属するとき，xを（ここで

は）mとnの名“m”,“n”を用いて“$n-m$”と表現する。

$n\in\mathbb{N}$に対する類$n-n$を，“0”で表わす。

2.5.2 順序関係の導入

$x, y\in\mathbb{N}_D$に対し，$x=s-r$, $y=t-r$となる$r, s, t\in\mathbb{N}$が存在する(註1)。このとき，$x\leqq y$を$s\leqq t$で定義する。——x, yを上のように表現したときの条件$s\leqq t$は，r, s, tの取り方に依存していない(註2)から，この定義は意味をもつ。

$\leqq$は，$\mathbb{N}_D$の上の全順序関係になっている。

>0である元を正元，<0である元を負元と呼ぶ。

$m, n\in\mathbb{N}$に対し

$$m<n \Longleftrightarrow n-m>0$$
$$m=n \Longleftrightarrow n-m=0$$
$$m>n \Longleftrightarrow n-m<0$$

が成り立つ。

（註1）$p, p', q, q'\in\mathbb{N}$に対し，$q-p=(q+p')-(p+p')$, $q'-p'=(p+q')-(p+p')$。

（註2）$x=s-r=s'-r'$, $y=t-r=t'-r'$のとき，$(s+t')+(r+r')=(s+r)+(t'+r)=(r+s')+(t+r')=(s'+t)+(r+r')$，よって$s+t'=s'+t$。したがって，$s\leqq t$と$s'\leqq t'$は同値。

2.5.3 加法の導入

$x, y\in\mathbb{N}_D$に対し，$x=r-s$, $y=t-r$となる$r, s, t\in\mathbb{N}$が存在する。このとき，

$$x+y=t-s.$$

と定義する。——x, yを上のように表現したときの$t-s\in\mathbb{N}_D$は，r, s, tの取り方に依存していない(註1)から，この定義は意味をもつ。

特に，

$(n-m)+(q-p)=(n+q)-(m+p)$

が成り立つ(註2)。——最初からこれを，$+$の定義にしてもよい。

（註1）$x=r-s=r'-s'$, $y=t-r=t'-r'$のとき，$s+t'=s'+t$（§2.5.2(註2)）。よって$t-s=t'-s'$。

（註2）実際，$n-m=(n+q)-(m+q)$, $q-p=(m+q)-(m+p)$。

2.5.4 乗法の導入

$n-m$, $q-p\in\mathbb{N}_D$に対し，

$$(n-m)\times(q-p)$$
$$=(m\times p+n\times q)-(m\times q+n\times p)$$

と定義する。$(m\times p+n\times q)-(m\times q+n\times p)$は$\mathbb{N}_D$の要素$n-m$, $q-p$の表現に依存していないから，この定義は意味をもつ。

2.5.5 $\mathbb{N}_D$の構造

$\mathbb{N}_D$は$\times$について可換半群をなし，$+$について可換群をなす——特に，$\mathbb{N}_D$は，導入した$+$，$\times$に関して“数の系”になっている。

0はここで定義した加法$+$の零元になる。また，$n-m$と$m-n$は，互いに他の対称元（$+$に関する逆元）になる。$x\in\mathbb{N}_D$に対し，xの対称元を$-x$と書く。

$x\in\mathbb{N}_D$が正元であることと，$-x$が負元であることとは，同値。また特に，以下のことが成り立つ(註1)：

(1) $(-x)+(-y)=-(x+y)$
(2) $(-x)\times y=x\times(-y)=-(x\times y)$
(3) $(-x)\times(-y)=x\times y$

$\mathbb{N}_D$は，$\leqq$と$+$に関して，順序群になっている。即ち，$x, y, z\in\mathbb{N}_D$についてつぎの関係が成り立つ(註2)：

$$x\leqq y \Longrightarrow x+z\leqq y+z.$$

$\mathbb{N}_D$の順序位相は離散である。

（註1）(1) $((-x)+(-y))+(x+y)=((-x)+x)+((-y)+y)=0+0=0$。

(2) $((-x)\times y))+(x\times y)=((-x)+x)\times y=0\times y=0$。$(x\times(-y))+(x\times y)=x\times((-y)+y)=x\times y=0$。

(3) (2)より，$(-x)\times(-y)=-((-x)\times y)=-(-(x\times y))=x\times y$。

（註2）$x=n-m$, $y=n'-m$, $z=q-p$とすると，$x+z=(n+q)-(m+p)$, $y+z=(n'+q)-(m+p)$。$x\leqq y$のとき$n\leqq n'$で，これより$n+q\leqq n'+q$。よって，$x+z\leqq y+z$。

2.5.6 $\mathbb{N}_D$の中への$\mathbb{N}$の埋め込み

写像$i:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}_D$を

$$i(n)=(n+n)-n \quad (n\in\mathbb{N})$$

で定義するとき，iは1対1で，

$$m\leqq n \Longrightarrow i(m)\leqq i(n)$$
$$i(m+n)=i(m)+i(n)$$
$$i(m\times n)=i(m)+i(n)$$

が成り立つ(註1)。そこでこのiによって，$(\mathbb{N},\leqq,+,\times)$を$(\mathbb{N}_D,\leqq,+,\times)$の部分$(i(\mathbb{N}),\leqq,+,\times)$と同一視できることになる。言い換えると，$i$によって，$(\mathbb{N},\leqq,+,\times)$は$(\mathbb{N}_D,\leqq,+,\times)$に埋め込まれる。またこの意味で，$\mathbb{N}_D$は$\mathbb{N}$の拡張である。

$i(\mathbb{N})$は，$\mathbb{N}_D$の正元全体と一致する(註2)。

$n\in\mathbb{N}$の表記を，$i(n)\in\mathbb{N}_D$の表記に流用する。したがって，$\mathbb{N}_D$の負元は，ある$n\in\mathbb{N}$に対する'$-n$'で表現されることになる。

このとき，$m,n\in\mathbb{N}$について，

$$n-m=n+(-m) \quad \text{(註3)}$$

また，群$\mathbb{N}_D$は$\{1,-1\}$から生成される(註4)。

（註1）(1) $i(n)=i(m)$，即ち，$(n+n)-n=(m+m)-m$のとき，$(n+n)+m=n+(m+m)$で，これより$n=m$。よって，iは1対1。

(2) $m\leqq n$のとき，$i(m)=(m+m)-m=(m+m+n)-(m+n)\leqq(n+n+m)-(m+n)=(n+n)-n=i(n)$。

(3) $i(m+n)=((m+n)+(m+n))-(m+n)=((m+m)-m)+(n+n)-n)=i(m)+i(n)$。

(4) $i(m\times n)=(m\times n+m\times n)-m\times n=(m\times n+m\times n+m\times n+m\times n+m\times n)-(m\times n+m\times n+m\times n+m\times n)=((m+m)\times(n\times n)+m\times n)-((m+m)\times n+m\times(n+n))=((m+m)-m)\times((n+n)-n)=i(m)\times i(n)$。

（註2）$n\in\mathbb{N}$に対し，$i(n)=(n+n)-n>n-n=0$。また，$\mathbb{N}_D$の正元は$m<n$である$m,n\in\mathbb{N}$に対する$n-m$の形に書けるが，$m+k=n$とするとき$n+k=m+(k+k)$で，これより$n-m=(k+k)-k$。

（註3）$n+(-m)=((n+n)-n)+(m-(m+m))=(n+n+m)-(n+m+m)=n-m$。

（註4）$x,y\in\mathbb{N}$で，xを1のm回の累加，yを1のn回の累加，そして$m<n$とする。

(1) $y-x$は$(1+1)-1$ $(=1\in\mathbb{N}_D)$の$n-m$回の累加に等しい。

実際，1の$(n-m+1)$回の累加zに対し$y-x=z-1$。$n-m=1$のときは，$z=1+1$で，よって$y-x=z-1=(1+1)-1$。そしてこれは，$(1+1)-1$の$n-m$ $(=1)$回の累加。$n-m>1$のとき，wを1の$(n-m-1)$回の累加とすると，$z-1=(z+w)-(1+w)$の右辺は$(1+1)-1$の$n-m$回の累加。

(2) $x-y$は$y-x$の対称元で，そして$y-x$は，(1)の結果から，$1-(1+1)$ $(=-1)$の$n-m$回の累加の対称元に等しい。よって，$x-y$は，$1-(1+1)$の$n-m$回の累加。

2.5.7 "自然数の減法"

$\mathbb{N}_D$においては，任意の$m,n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_D$に対し，$m+x=n$となる$x$が存在し，実際$x=n-m$である(註1)。

$\mathbb{N}$において，$m+p=n$となるpを$n-m$で表わす(註2)。このときの$n-m$は常には定義されない。しかし定義されるときには，$\mathbb{N}$の$\mathbb{N}_D$への埋め込みにおいて，$\mathbb{N}_D$の要素$n-m$——(m,n)の類として定義されるところの$n-m$——と一致することになる。

以上の意味で，"$\mathbb{N}$の$\mathbb{N}_D$への拡張は，自然数同士の減法をいつも可能であるようにする拡張"という言い方がされることがある。

（註1）$m+(n-m)=((m+m)-m)+(n-m)=(n+m+m)-(m+m)=(n+n+m+m)-(n+m+m)=(n+n)-n=n$。

（註2）この段階で，記号'$-$'は三通りに使われている：

(1) $\mathbb{N}_D$の要素の表現"$n-m$"

(2) $\mathbb{N}_D$の要素xの対称元の表現"$-x$"

(3) $\mathbb{N}$において$m+p=n$であるときの，pに対する表現"$n-m$"

同一の記号を異なる意味に混用することは，学習者にとって混乱とつまずきのもととなるが，強いて混用するのは，形式的操作（"計算"）の便利のためである。

2.5.8　乗法の解釈

乗法の解釈は“累加（倍）の合成”である。

$\mathbb{N}$の$\mathbb{N}_D$の拡張に応じて，$\mathbb{N}$に対しての累加の概念が拡張される。

即ち，$n\in\mathbb{N}$に対し，$\mathbb{N}_D$での“n回の累加”は$\mathbb{N}$での“n回の累加”と同じ。そして“（$-n$）回の累加”の意味は，“$x\in\mathbb{N}_D$に対する（$-n$）回の累加”が“xの対称元$-x$のn回の累加”と定義されるところのもの。

2.6　$(\mathbb{N}_D)_R$（＝有理数の系$\mathbb{Q}$）

2.6.1　$(\mathbb{N}_D)_R$の定義

$\mathbb{N}$から$\mathbb{N}_R$を導出したのと殆ど同じやり方で，$\mathbb{N}_D$から$(\mathbb{N}_D)_R$を導出する。

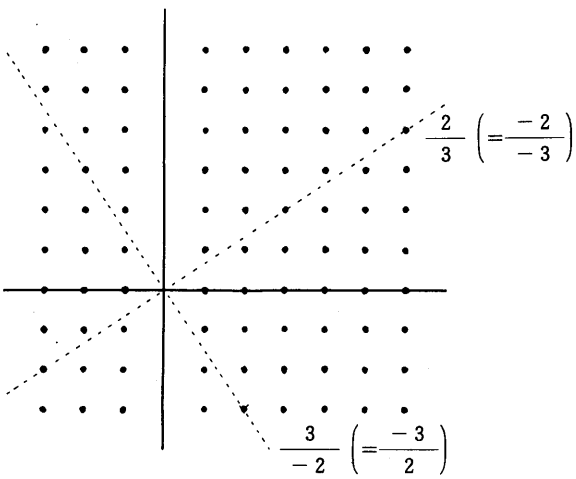
即ち，$\mathbb{N}_D$から0を除いた集合を$\mathbb{N}_D^*$とするとき，$\mathbb{N}_D^*\times\mathbb{N}_D$の要素の間の関係〜を

$$(x,\ y)\sim(x',\ y') \iff x\times y'=x'\times y$$

で定義するとき，〜は$\mathbb{N}_D^*\times\mathbb{N}_D$の上の同値関係になっている。$\mathbb{N}_D^*\times\mathbb{N}_D$を〜で類別して得られる類の集合を$(\mathbb{N}_D)_R$と定義する。

$(x,\ y)\in\mathbb{N}_D^*\times\mathbb{N}_D$が属する類を，“$y/x$”あるいは“$\frac{y}{x}$”と表現する。

$\mathbb{N}_D^*\times\mathbb{N}_D$を座標平面の形に表現された$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の部分とみなすとき，つぎのように並ぶ点の各類が，$(\mathbb{N}_D)_R$の要素になる：



2.6.2　順序関係の導入

$x,\ y\in(\mathbb{N}_D)_R$に対し，$x=\frac{s}{r}$, $y=\frac{t}{r}$となる$r\in\mathbb{N}$, $s,\ t\in\mathbb{N}_D$が存在する。このとき，$x\leqq y$を$s\leqq t$で定義する。

$\leqq$は，$(\mathbb{N}_D)_R$の上の全順序関係になっている。また，$(\mathbb{N}_D)_R$は$\leqq$に関して稠密である。

2.6.3　加法の導入

$x,\ y\in(\mathbb{N}_D)_R$に対し，$x=\frac{s}{r}$, $y=\frac{t}{r}$となるr, $s,\ t\in\mathbb{N}_D$が存在する。このとき，$x+y=\frac{s+t}{r}$と定義する。

2.6.4　乗法の導入

$x,\ y\in(\mathbb{N}_D)_R$に対し，$x=\frac{s}{r}$, $y=\frac{t}{r}$となるr, $s,\ t\in\mathbb{N}_D$が存在する。このとき，$x\times y=\frac{s}{r}$と定義する。

2.6.5　$(\mathbb{N}_D)_R$の構造

$(\mathbb{N}_D)_R$は＋，×について可換体をなす——特に，$\mathbb{N}_D$は導入した＋，×に関して“数の系”になっている。

$(\mathbb{N}_D)_R$は，$\leqq$と＋に関して順序体になる。即ち，$x,\ y,\ z\in(\mathbb{N}_D)_R$についてつぎの関係が成り立つ：

$$x<y \Longrightarrow x+z<y+z,$$
$$x<y\text{かつ}z>0 \Longrightarrow x\times z<y\times z.$$

2.6.6　$(\mathbb{N}_D)_R$の中への$\mathbb{N}_D$の埋め込み

$i\ (n)=\frac{n}{1}$で定義される写像$i:\mathbb{N}_D\longrightarrow(\mathbb{N}_D)_R$は，$((\mathbb{N}_D)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の中への$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の埋め込みになる。またこの意味で，$(\mathbb{N}_D)_R$は$\mathbb{N}_D$の拡張である。

$n\in\mathbb{N}_D$の表記を，$i\ (n)\in(\mathbb{N}_D)_R$の表記に流用する。

2.7　$(\mathbb{N}_R)_D$

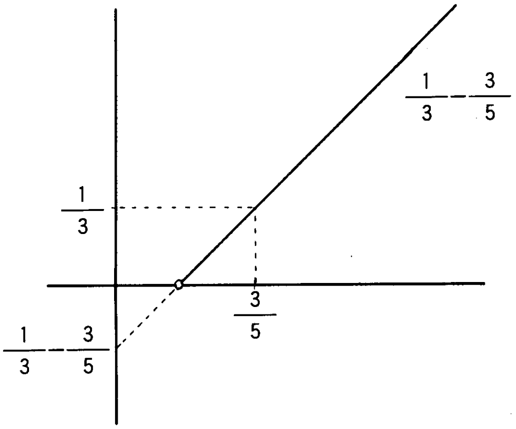
2.7.1　$(\mathbb{N}_R)_D$の定義

$(\mathbb{N},\ \leqq,\ +,\ \times)$から$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出したのと全く同じやり方で，$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$から$((\mathbb{N}_R)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出する。

$(\mathbb{N}_R)_D$の要素は$\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$の要素の類である。$(x,\ y)\in\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$が属する類を“$y-x$”で表

わす。

$\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$を座標平面の形に表現された$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の部分とみなすとき，つぎのような傾き１の直線（の部分）の各々が，$(\mathbb{N}_R)_D$の要素になる：



2.7.2　$(\mathbb{N}_R)_D$の中への$\mathbb{N}_R$の埋め込み

写像i：$\mathbb{N}_R\longrightarrow(\mathbb{N}_R)_D$；$x\longmapsto(x+x)-x$
は，$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の$((\mathbb{N}_R)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の中への埋め込みであり，かつ$i(\mathbb{N}_R)$は$(\mathbb{N}_R)_D$の正元全体と一致する(註)。

（註）証明は，§2.5.6の（註１），（註２）に同じ。

2.7.3　$(\mathbb{N}_R)_D$と$(\mathbb{N}_D)_R$の同型性

$$i\left(\frac{q}{p}-\frac{n}{m}\right)=\frac{(m\times q)-(n\times p)}{m\times p}$$

（右辺の$m\times p$は，$m\times p\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_D$と見る）

で定義される写像i：$(\mathbb{N}_R)_D\longrightarrow(\mathbb{N}_D)_R$は，$((\mathbb{N}_R)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の$((\mathbb{N}_D)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の上への同型になっている(註)。即ち，$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$からの$((\mathbb{N}_R)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の導出と，$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$からの$((\mathbb{N}_D)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の導出では，実質的に同じ対象がつくられる。

（註）これの逆同型は，

$$j\left(\frac{q-p}{n}\right)=\frac{q}{n}-\frac{p}{n}$$

（左辺のnは，$n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_D$と見る）

で定義される写像j：$(\mathbb{N}_D)_R\longrightarrow(\mathbb{N}_R)_D$。

証明することは，以下のことである：

(1)　$j=i^{-1}$；

(2)　$x\leqq y\Longrightarrow i(x)\leqq i(y)$
$i(x+y)=i(x)+i(y)$
$i(x\times y)=i(x)\times i(y)$

(1)の証明：

$$j\left(i\left(\frac{n}{m}-\frac{q}{p}\right)\right)=j\left(\frac{np-mq}{mp}\right)=\frac{np}{mp}-\frac{mp}{mp}=\frac{n}{m}-\frac{q}{p}$$

$$(mp\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_D)$$

$$i\left(j\left(\frac{q-p}{n}\right)\right)=i\left(\frac{q}{n}-\frac{p}{n}\right)=\frac{qn-np}{nn}$$
$$=\frac{(q-p)n}{nn}=\frac{q-p}{n}\qquad(n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_D)$$

よって，$j\circ i$，$i\circ j$は，それぞれ$(\mathbb{N}_R)_D$，$(\mathbb{N}_D)_R$の恒等写像。

(2)の証明：

ここでは，$i(x+y)=i(x)+i(y)$だけを示すとしよう。

$$i\left(\left(\frac{n}{m}-\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{n'}{m'}-\frac{q'}{p'}\right)\right)$$
$$=i\left(\left(\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}\right)-\left(\frac{q}{p}+\frac{q'}{p'}\right)\right)$$
$$=i\left(\frac{nm'+mn'}{mm'}-\frac{qp'+pq'}{pp'}\right)$$
$$=\frac{(nm'+mn')(pp')-(mm')(qp'+pq')}{(mm')(pp')}$$
$$=\frac{(nm'pp'+mn'pp')-(mm'qp'+mm'pq')}{mm'pp'}$$
$$=\frac{(nm'pp'-mm'qp')+(mn'pp'-mm'pq')}{mpm'p'}$$
$$=\frac{(np-mq)m'p'+mp(n'p'-m'q')}{mpm'p'}$$
$$=\frac{np-mq}{mp}+\frac{n'p'-m'q'}{m'p'}$$
$$=i\left(\frac{n}{m}-\frac{q}{p}\right)+i\left(\frac{n'}{m'}-\frac{q'}{p'}\right)$$

2.8　“閉じた”拡張

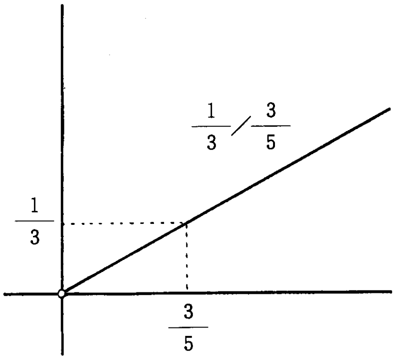
2.8.1　$(\mathbb{N}_R)_R$と$\mathbb{N}_R$の同型性

$(\mathbb{N},\ \leqq,\ +,\ \times)$から$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出したのと全く同じやり方で，$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$から$((\mathbb{N}_R)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出する。

$(\mathbb{N}_R)_R$の要素は$\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$の要素の類である。$(x,\ y)\in\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$が属する類を‘$y/x$’あるいは$\frac{y}{x}$で表わす。

$\mathbb{N}_R\times\mathbb{N}_R$を座標平面の形に表現された$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

の部分とみなすとき，つぎのような直線（の部分）の各々が，$(\mathbb{N}_R)_R$の要素になる：



さて，

$$i\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}\right)=\frac{n\times p}{m\times q} \qquad (m,\ n,\ p,\ q\in\mathbb{N})$$

で定義される写像i：$(\mathbb{N}_R)_R\longrightarrow\mathbb{N}_R$は，$((\mathbb{N}_R)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の上への同型になっている(註)。即ち，$(\mathbb{N}_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$からの$((\mathbb{N}_R)_R,\ \leqq,\ +,\ \times)$の導出では，実質的に，新しい対象はつくられない。

（註）これの逆同型は，

$$j\ (x)=\frac{x}{1} \qquad (x\in\mathbb{N}_R)$$

で定義される写像j：$\mathbb{N}_R\longrightarrow(\mathbb{N}_R)_R$――但しここで，$1\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_R$と見る。

証明することは，以下のことである：

(1)　$j=i^{-1}$；

(2)　$x\leqq y\Longrightarrow i\ (x)\ \leqq i\ (y)$

　　$i\ (x+y)=i\ (x)+i\ (y)$

　　$i\ (x\times y)=i\ (x)\times i\ (y)$

(1)の証明：

$$j\left(i\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}\right)\right)=j\left(\frac{np}{mq}\right)=\frac{np}{mq}\Big/\frac{1}{1}$$

一方

$$\frac{n}{m}\times\frac{1}{1}=\frac{n}{m}=\frac{q}{p}\times\frac{np}{mq}$$

より

$$\frac{np}{mq}\Big/\frac{1}{1}=\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}$$

よって，$j\circ i$は$(\mathbb{N}_R)_R$の恒等写像。また，明らかに，$i\circ j$は$\mathbb{N}_R$の恒等写像。

(2)の証明：

ここでは，$i\ (x+y)=i\ (x)+i\ (y)$だけを示すとしよう。

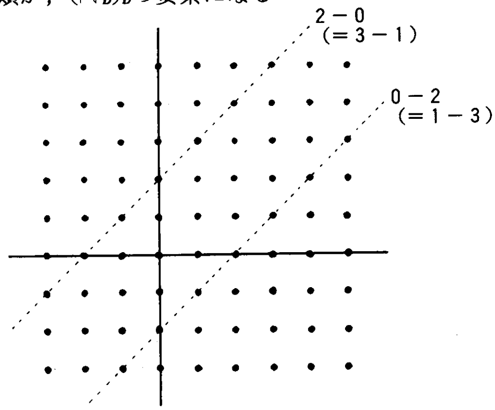
$$\begin{aligned}
&i\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}+\frac{n'}{m'}\Big/\frac{q'}{p'}\right)\Big)=i\left(\frac{np}{mq}\Big/\frac{1}{1}+\frac{n'p'}{m'q'}\Big/\frac{1}{1}\right)\\
&=i\left(\left(\frac{np}{mq}+\frac{n'p'}{m'q'}\right)\Big/\frac{1}{1}\right)=\frac{np}{mq}+\frac{n'p'}{m'q'}\\
&=i\left(\frac{np}{mq}\Big/\frac{1}{1}\right)+i\left(\frac{n'p'}{m'q'}\Big/\frac{1}{1}\right)\\
&=i\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}\right)+i\left(\frac{n'}{m'}\Big/\frac{q'}{p'}\right)
\end{aligned}$$

2.8.2　$(\mathbb{N}_D)_D$と$\mathbb{N}_D$の同型性

$(\mathbb{N},\ \leqq,\ +,\ \times)$から$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出したのと全く同じやり方で，$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$から$((\mathbb{N}_D)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$を導出する。

$(\mathbb{N}_D)_D$の要素は$\mathbb{N}_D\times\mathbb{N}_D$の要素の類である。$(x,\ y)\in\mathbb{N}_D\times\mathbb{N}_D$が属する類を“$y-x$”で表わす。

$\mathbb{N}_D\times\mathbb{N}_D$を座標平面の形に表現された$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の部分とみなすとき，つぎのように並ぶ点の各類が，$(\mathbb{N}_D)_D$の要素になる：



さて，

$$i((q-p)-(n-m)=(n+q)-(m+p) \qquad (m,\ n,\ p,\ q\in\mathbb{N})$$

で定義される写像i：$(\mathbb{N}_D)_D\longrightarrow\mathbb{N}_D$は，$((\mathbb{N}_D)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の上への同型になっている(註)。即ち，$(\mathbb{N}_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$からの$((\mathbb{N}_D)_D,\ \leqq,\ +,\ \times)$の導出では，実質的に，新しい対象はつくられない。

（註）これの逆同型は，

$j(x)=x-0 \qquad (x\in\mathbb{N}_D)$

で定義される写像 $j:\mathbb{N}_D \longrightarrow (\mathbb{N}_D)_D$。

証明することは，以下のことである：

(1)　$j=i^{-1}$；

(2)　$x\leqq y \Longrightarrow i(x)\leqq i(y)$

$i(x+y)=i(x)+i(y)$

$i(x\times y)=i(x)\times i(y)$

(1)の証明：

$j(i((n-m)-(q-p)))=j((n+p)-(m+q))$
$=((n+p)-(m+q))-(1-1)$.

一方，

$(n-m)+(1-1)=(n+1)-(m+1)=n-m$
$=(n+p+q)-(m+p+q)$
$=(q-p)+((n+p)-(m+q))$

より

$((n+p)-(m+q))-(1-1)=(n-m)-(q-p)$.

よって，$j\circ i$は $(\mathbb{N}_D)_D$の恒等写像。また，

$i(j(n-m))=i((n-m)-(1-1))$
$=(n+1)-(m+1)=n-m$

となり，$i\circ j$は$\mathbb{N}_D$の恒等写像。

(2)の証明：

ここでは，$i(x+y)=i(x)+i(y)$ だけを示すとしよう。

$i(((n-m)-(q-p))+((n'-m')-(q'-p')))$
$=i(((n-m)+(n'-m'))-((q-p)+(q'-p'))$
$=i(((n+n')-(m+m'))-((q+q')-(p+p')))$
$=((n+n')+(p+p'))-((m+m')+(q+q'))$
$=((n+p)+(n'+p'))-((m+q)+(m'+q'))$
$=((n+p)-(m+q))+((n'+p')-(m'+q'))$
$=i(((n-m)-(q-p))+i((n'-m')-(q'-p')))$

2.8.3　$(((\mathbb{N}_R)_D)_R$と$\mathbb{N}_{RD}$の同型性

$(\mathbb{N}_D)_R$と $(\mathbb{N}_R)_D$の同型の証明は，このときの$\mathbb{N}$を$\mathbb{N}_R$に置き換えれば，そのまま$((\mathbb{N}_R)_D)_R$と$((\mathbb{N}_R)_R)_D$の証明になる。一方，$(\mathbb{N}_R)_R$と$\mathbb{N}_R$の同型は，$((\mathbb{N}_R)_R)_D$と $(\mathbb{N}_R)_D$の同型を導く。結局，$((\mathbb{N}_R)_D)_R$と $(\mathbb{N}_R)_D$は同型。

2.8.4　$((\mathbb{N}_D)_R)_D$と$\mathbb{N}_{RD}$の同型性

$(\mathbb{N}_D)_R$と $(\mathbb{N}_R)_D$の同型は，$((\mathbb{N}_D)_R)_D$と$((\mathbb{N}_R)_D)_D$の同型を導く。一方，$(\mathbb{N}_D)_D$と$\mathbb{N}_D$の同型の証明は，このときの$\mathbb{N}$を$\mathbb{N}_R$に置き換えれば，そのまま$((\mathbb{N}_R)_D)_D$と $(\mathbb{N}_R)_D$の証明になる。結局，$((\mathbb{N}_D)_R)_D$と $(\mathbb{N}_R)_D$は同型。

3　量に随伴する数

3.1　数の契機としての量

本章では，数を，量の系における《一つの要素による他の要素の生成》の主題化，《二つの要素の“比”》の主題化，あるいは《位の系列化》の主題化から起こるものとして解釈し，この場合の量と数の定式化を示す。

3.2　“量”の概念の領分

いま，われわれの“時刻”と“時間”の形式について考えてみる。

“時刻”のイメージは，線の上の点である。点は〈位〉で順序づけられており，〈位〉の順序が線を形成する。

“時間”のイメージはこれとは異なる。要素は〈大きさ〉でイメージされている。そして，要素間に順序関係は考えられているが，それは〈位〉の順序ではなく，“大小”関係であり，“整列の線”のイメージもない。しかしそれでも，“時間”を〈位〉の整列のイメージで見ることはできる――〈大きさ〉の順序を〈位〉の順序と見なすことで。

“時間”の系は，“時刻”の系を持ち出すことなく，一つの独立した系として記述できる。これに対し，時間の系を持ち出さずに“時刻”の系を記述することはできない。しかしつぎの意味では，“時間”は“時刻”から導出されるものである。

即ち，“時間”は，〈位〉としての“時刻”に対する〈変位〉として解釈できる。

そしてまた，“時間”は，〈位〉としての“時間”に対する〈変位〉としても解釈できる。〈位〉としての“時間”は〈変位〉としての“時間”を導出する。〈位〉としての“時間”を導入するとき，最初のイメージの“時間”は，〈変位〉としての“時間”として身分づく。

〈変位〉としての“時間”（“時刻”に対するものとしても，〈位〉としての“時間”に対するものとしても）は，＋に関して群の構造で考えられる。これに対し，最初のイメージの“時間”は，半群である。したがって，“時間”に対する〈変位〉の解釈は，単なる見方の変更ではない。それは別の〈存在〉の導入を意味している。したがって，“時間”の記述は，半群と群の二つの解釈の併記になる。

つぎに，“りんごの個数”を“量”として考えてみる。これは，“時刻”と“時間”（これには，半群と群の二種類がある）のどちらと対照すべきか。

何れの対照も，合理化できる。即ち，《“りんごの個数”は足し算や倍の算法に直接のる》とすることも，《“りんごの個数”は〈位〉であり，直接足し算や倍の算法にのるものではない》とすることもできる。前者の場合，“りんごの個数”は半群の構造で考えられる。後者の場合には，〈変位〉としての“りんごの個数”を導入し，これが足し算や倍の算法の舞台になると解釈することになる——そしてこの“りんごの個数”は群の構造で考えられる。

最後に，“時刻”と対照された“りんごの個数”と“時刻”との違いと，“時間”と対照された“りんごの個数”と“時間”の違いには，同質のものが認められる。即ち，“離散”と“稠密”の違いである。

われわれは，《以上述べてきたことのすべてに解釈を与え得る》ということを，われわれの“量”の概念の条件とする。

3.3 “量”の一般的形式

われわれは，《“量”を一般的形式（§3.7）へと定式化していく》過程の中で，“量”に随伴するものとして“数”を示していく。

ここで言う《“量”の一般的形式》の意味は，《われわれの“長さ”や“時間”や“時刻”を一様に取り込むことができる》である。

“量”を一般的形式にのせようとするとき，或る“量”に対しては（あるいはむしろ，すべての“量”に対して）“方便”を用いることになる。

例えば，和の算法を考えているわれわれの“時間”は，半群である。実際，われわれは“負の時間”というものを実体化して考えることはしない。この“時間”を“量”の一般的形式にのせるわれわれの“方便”はつぎのようになる（§3.5.6）：《和の内算法は時間の間にではなく，“時間の増・減”の間に定義される；そして，時間に対する時間の増・減の作用が，“時間の和の内算法”の見掛けをもたらしている》

3.4 “量”に対する三つの二分法

“量”の概念を，われわれは，“上に非有界な全順序集合Q”というところから出発するとしよう。

つぎにわれわれは，量Qに対しつぎの三通りの二分法を考えることにする：

(1) （“量の和”と読まれるところの）内算法＋が定義されている／いない；

(2) 下に有界／非有界；

(3) 離散／稠密[註1]．

（本論では，連続量[註2]は考えない。）

そこで，＋が定義されている場合といない場合のそれぞれにおいて，“量”Qのつぎの区分が考えられることになる：

	離散	稠密
下に有界		
下に非有界		

（註1）“離散”と“稠密”は《互いに他の逆》の関係にある概念ではない。ここの二分法は，“離散か稠密かのどちらか一方”と読むものとする。

なお，“離散”とは，Qの全順序位相が離散ということ——即ち，各$X \in Q$に対し，$\{X\}$がXの近傍になるということ——であり，“稠密”とは，任意のX，$Y \in Q$に対し，$X < W < Y$となる$W \in Q$が存在するということである。

（註２）ここで言う“連続”は，“上［下］に有界な部分は上［下］限をもつ”の意味の数学的概念。

3.5　内算法＋が定義されている場合

3.5.1　(Q，≦，＋)の条件

(Q，≦，＋)については，さらにつぎのように考える：

(1)　下に有界のときは順序可換半群で，下に非有界のときは順序可換群（このとき，Qの正元全体の集合 $\{X \mid X>0\}$ をQ^+で表わす)。

(2)　離散のとき，Qは一つの元で生成される——但し以下の意味のこととして：

下に有界のとき，或る$U \in Q$が存在して，任意の$X \in Q$がUの累加で表わされる；

下に非有界のとき，或る$U \in Q$が存在して，任意の$X \in Q$がUか$-U$かどちらかの累加で表わされる。

(3)　稠密のとき，

(3-1)（“等分可能性”：）任意の$X \in Q$と自然数m（註1）に対し，Qの要素でそれのm回の累加がXになるようなものが存在する。

(3-2)（“共約可能性”：）

下に有界のとき，任意のX，$Y \in Q$に対し，或る$U \in Q$が存在して，X，Yの両方がUの累加で表わされる（同じこととして（註2），或る$V \in Q$が存在して，VがX，Y両方の累加で表わされる)；

下に非有界のとき，任意のX，$Y \in Q^+$に対し，或る$U \in Q$が存在して，X，YがUの累加で表わされる（同じこととして，或る$V \in Q$が存在して，VがX，Y両方の累加で表わされる)．

（註１）数を導入しようとしている現記述でこのように“自然数m”を言うことは，循環論法ではない。数の導入は一つの言語系$\mathcal{L}$の記述であるが，“自然数m”は，$\mathcal{L}$に属するのではなく，$\mathcal{L}$を記述している言語（“$\mathcal{L}$のメタ言語”）に属している。

（註２）XがUのm回の累加，YがUのn回の累加のとき，Xのn回の累加とYのm回の累加は等しい。逆に，Xのn回の累加とYのm回の累加が等しいとき，m回の累加がXになるUは，n回累加するとYになる。

3.5.2　“数の系”としての(Q，≦，＋)

“下に有界な離散量(Q，≦，＋)”と“自然数の系($\mathbb{N}$，≦，＋)”の概念は一致する。特に，下に有界な離散量は，($\mathbb{N}$，≦，＋)——($\mathbb{N}$，≦，＋，×)ではない——の実現ということになる。

実際，Qの生成元をUとし，各$X \in Q$に対し$X+U$をXの“後者”と定めるとき，Qはペアノの公理を満たし（§2.1.1)，＋は，“自然数の系”としてのQにおいて定義される加法＋（§2.1.6）と一致する。また逆に，系($\mathbb{N}$，≦，＋)は下に有界な離散量になっている（§2.1.8)。

さらに，“下に非有界な離散量(Q，≦，＋)”，“下に有界な稠密量(Q，≦，＋)”，“下に非有界な稠密量(Q，≦，＋)”の概念は，それぞれ，“数の系($\mathbb{N}_D$，≦，＋)”，“($\mathbb{N}_R$，≦，＋)”，“($\mathbb{N}_{DR}$，≦，＋)”——($\mathbb{N}_D$，≦，＋，×)，($\mathbb{N}_R$，≦，＋，×)，($\mathbb{N}_{DR}$，≦，＋，×)ではない——と一致する（註)。

そこで，(Q，≦，＋)の分類はつぎのようになる：

	離散	稠密
下に有界	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}_R$
下に非有界	$\mathbb{N}_D$	$\mathbb{N}_{DR}$

（註）(1)　($\mathbb{N}_D$，≦，＋)が下に非有界な離散量であることは，§2.5.5で示されている。($\mathbb{N}_R$，≦，＋)，($\mathbb{N}_{DR}$，≦，＋)については，“等分可能性”と“共約可能性”が満たされていることを示す。

(1-1) $\mathbb{N}_R$の場合：(i)“等分可能性”：m，$n \in \mathbb{N}$と，任意の自然数kに対し，n/mは$n/(m \times k)$のk回の累加。

(ii)“共約可能性”：m，n，m'，$n' \in \mathbb{N}$に対し，n/m，n'/m'は，$1/(m \times m')$で共約される。

(1-2) $\mathbb{N}_{DR}$の場合：(i)“等分可能性”：x，$y \in \mathbb{N}_D$で$x \neq 0$とする。任意の自然数kに対しzをxのk回の

累加とするとき，y/xはy/zのk回の累加。

(ii) “共約可能性”：x，y，x'，$y'\in\mathbb{N}_D$でx，$x'\neq 0$とする。y/x，y'/x'は，$1/(x\times x')$で共約される。

(2-1) 下に非有界な離散量（Q，≦，＋）と（$\mathbb{N}_D$，≦，＋）が同型であること：

Qの生成元$U>0$に対し，Uのn回の累加に$1\in\mathbb{N}_D$のn回の累加，$-U$のn回の累加に$-1\in\mathbb{N}_D$のn回の累加，そして$0\in Q$に$0\in\mathbb{N}_D$をそれぞれ対応させる写像$i:Q\longrightarrow\mathbb{N}_D$は，（$Q$，≦，＋）の（$\mathbb{N}_D$，≦，＋）の上への同型になる。

(2-2) 下に有界な稠密量（Q，≦，＋）と（$\mathbb{N}_R$，≦，＋）が同型であること：

元$U\neq 0$を固定し，写像$i:Q\longrightarrow\mathbb{N}_R$をつぎのように定義する。即ち，各$X\in Q$に対し，$U$と$X$を共約する$V$をとり，$U$と$X$が$V$のそれぞれ$m$，$n$回の累加であるときに，$i(X)$を$n/m$と定める。

$i(X)$はVのとり方に依らない。実際，或るV'に対しUとXがV'のそれぞれm'，n'回の累加であるとき，m'回累加してVになる元とm回累加してV'になる元は，$m\times m'$回累加するとともにUになるから，一致する。この元をWとすると，XはWの$m'\times n$回の累加であると同時に，$m\times n'$回の累加でもある。よって$m'\times n=m\times n'$，即ち$n/m=n'/m'$。

Qの元X，Yに対し，U，X，Yを共約する元がとれるから$i(X)=n/m$，$i(Y)=n'/m$と書ける。そして$X<Y$のとき，$n<n'$で，よって$i(X)<i(Y)$。特に，iは1対1。

また，$n/m\in\mathbb{N}_R$に対し，m回累加してUになるもののn回の累加をXとすれば，$i(X)=n/m$。よってiは全射。

最後に，X，$Y\in Q$とU，X，Yを共約するWに対し，U，X，YがそれぞれWのm，n，p回の累加であるとき，$i(X+Y)=(n+p)/m=n/m+p/m=i(X)+i(Y)$。

(2-3) 下に非有界な稠密量（Q，≦，＋）と（$\mathbb{N}_{DR}$，≦，＋）が同型であること：

下に有界な稠密量の場合とほぼ同様に証明される。

3.5.3 “数の系”の構成としての（Q，≦，＋）の構成

“下に有界な離散量（Q，≦，＋）”，“下に非有界な離散量（Q，≦，＋）”，“下に有界な稠密量（Q，≦，＋）”，“下に非有界な稠密量（Q，≦，＋）”がそれぞれ数の系$\mathbb{N}$，$\mathbb{N}_D$，$\mathbb{N}_R$，$\mathbb{N}_{DR}$と同値な概念であることから，特に，$\mathbb{N}$の構成（§2.1.3），$\mathbb{N}$からの$\mathbb{N}_D$の構成（§2.5.1），$\mathbb{N}$からの$\mathbb{N}_R$の構成（§2.4.1），$\mathbb{N}_D$からの$\mathbb{N}_{DR}$の構成（§2.6.1）は，それぞれ“下に有界な離散量（Q，≦，＋）の構成”，“下に有界な離散量（Q，≦，＋）からの下に非有界な離散量（Q'，≦，＋）の構成”，“下に有界な離散量（Q，≦，＋）からの下に有界な稠密量（Q'，≦，＋）の構成”，“下に非有界な離散量（Q，≦，＋）からの下に非有界な稠密量（Q'，≦，＋）の構成”ということになる。

逆に，量（Q，≦，＋）の構成は，そのまま“数の構成”と読める。

3.5.4 離散量からの稠密量の構成と，稠密量からの離散量の導出

“数の系”としての（Q，≦，＋）の構成は，同時に，離散量からの稠密量の構成を示している。

一方，稠密量からは離散量を導くことができる。またこのとき，離散量として稠密量の部分をとることができる。

例えば，下に非有界な稠密量（Q，≦，＋）に対しては，Qの要素$U>0$を任意にとり，（Q'，≦，＋），（Q''，≦，＋）をそれぞれUから生成される（Q，≦，＋）の部分順序半群，部分順序群とすれば，これはそれぞれ，下に有界，非有界な離散量になっている。

3.5.5 “比”の系

量（Q，≦，＋）からは，“比”の系が導出される。“比”の系の考え方とそれの導出の仕方は，数の系$\mathcal{N}$――（Q，≦，＋）は数の系$\mathbb{N}$，$\mathbb{N}_R$，$\mathbb{N}_D$，$\mathbb{N}_{RD}$のいずれかと同型である（§3.5.2）――に対する$\mathcal{N}_R$の考え方とそれの導出の仕方（§2.2，§2.4，§2.6，§2.8.1，§2.8.3）

と同じである。

特に，$(Q, \leqq, +)$ から導出される“比”の系は，$(Q, \leqq, +)$ が下に有界であるときは$\mathbb{N}_R$，下に比有界であるときは$\mathbb{N}_{DR}$となる。

“比”ξに $(X, Y) \in Q \times Q$が属するとき，ξをY/Xと表わす。

3.5.6　系$((Q, \leqq, +), (\mathcal{N}, \leqq, +, \times), {}_\times)$

量 $(Q, \leqq, +)$ とこれから導出される“比”の系 $(\mathcal{N}, \leqq, +, \times)$ に対し，Qの要素Xに対する$\mathcal{N}$の要素ξの（“倍”）作用$X_\times \xi$を，つぎのように定義する：

(1)　$(Q, \leqq, +)$ が下に有界（即ち，半群）で$\xi = Y/X$のとき，$X_\times \xi = Y$；

(2)　$(Q, \leqq, +)$ が下に非有界（即ち，群）のとき，

(2-1) $X = 0$のとき，$X_\times \xi = 0$

(2-2) $X \neq 0$で$\xi = Y/X$のとき，$X_\times \xi = Y$.

作用$_\times$は，Qが稠密であるとき，つねに定義されることになる。

$(Q, \leqq, +)$ と $(\mathcal{N}, \leqq, +, \times)$ が作用$_\times$でつながっている系を，$((Q, \leqq, +), (\mathcal{N}, \leqq, +, \times), {}_\times)$で表わす。

3.5.7　“差”の系

量 $(Q, \leqq, +)$ からは，“差”の系 $(D, \leqq, +)$ が導出される。“差”の系の考え方とそれの導出の仕方は，数の系$\mathcal{N}$——$(Q, \leqq, +)$ は数の系$\mathbb{N}$，$\mathbb{N}_R$，$\mathbb{N}_D$，$\mathbb{N}_{RD}$のいずれかと同型——に対する$\mathbb{N}_D$の考え方とそれの導出の仕方（§2.2，§2.5，§2.7，§2.8.2，§2.8.4）と同じである。

特に $(D, \leqq, +)$ は，$(Q, \leqq, +)$ が離散であるときは$\mathbb{N}_D$と同型，稠密であるときは$\mathbb{N}_{RD}$と同型である。したがってまた，$(D, \leqq, +)$ は下に非有界な量であり，系$((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_\times)$ として表現される。

“差”xに $(X, Y) \in Q \times Q$が属するとき，xを$\overrightarrow{XY}$と表わす。

関数$i: Q \longrightarrow D$；$X \longrightarrow \overrightarrow{X\ (X+X)}$ は，Qが下に有界のとき $(Q, \leqq, +)$ の $(D^+, \leqq, +)$ の上への同型であり，下に非有界のとき，$(Q, \leqq, +)$ の $(D, \leqq, +)$ の上への同型である[註1]。——$\rightarrow X \in Q$に対する$i(X) \in D$の読みは“X増”，$-i(X) \in D$の読みは“X減”である。Dの$+$は“増・減”の合成と読まれる。

Qが下に有界のとき，iによってQとD^+を同一視し，Qが下に非有界のとき，iによってQとDを同一視する。このとき，

(1)　Qが下に有界のとき，$X<Y$となるX，$Y \in Q$に対し，$X + \overrightarrow{XY} = Y$；

(2)　Qが下に非有界のとき，任意のX，$Y \in Q$に対し，$X + \overrightarrow{XY} = Y$[註2].

（註1）§2.5.6，§2.7.2，§2.8.2，§2.8.4

（註2）$X+Z=Y$とすると，$X+(Z+Z)=Y+Z$より$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{Z\ (Z+Z)} = i\ (Z) = Z$。

3.5.8　系$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathcal{N}, \leqq, +, \times), {}_\times), {}_+)$

量 $(Q, \leqq, +)$ とこれから導出される“差”の系 $(D, \leqq, +)$ に対し，Qの要素Xに対するDの要素xの作用（“併進”）$X_+ x$を，つぎのように定義する：

$x = \overrightarrow{XY}$となるYが存在しないときは定義されない；存在するときは，$X_+ x = Y$.

Qが下に非有界のときは，作用$_+$はつねに定義される。

つぎのことが成立つ[註]：

(1)　$(X_+ x)_+ y$が定義されれば$X_+(x+y)$ も定義されて，かつ

$$(X_+ x)_+ y = X_+(x+Y)\ ;$$

(2)　$X_+ 0 = X$；

(3)　$X_+ x$が定義されるとき，

$$x > 0 \Longleftrightarrow X < X_+ x.$$

また，X，$Y \in Q$に対し，

$$X + Y = X_+ i(Y).$$

特に，Qの内算法$+$は作用$_+$で代行でき，不要とすることができる。

いま，$(Q, \leqq)$——$(Q, \leqq, +)$ ではない——と$((D, \leqq, +), (\mathcal{N}, \leqq, +, \times), {}_\times)$ が作用$_+$でつながっている系を，$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathcal{N}, \leqq, +, \times), {}_\times), {}_+)$で表現する。

（註）(1)　$(X_+x)_+y$が定義されるとき，$x=\overrightarrow{XY}$，$y=\overrightarrow{YZ}$となるY，$Z\in Q$が存在して，$(X_+x)_+y=Z=X_+\overrightarrow{XZ}=X_+(x+y)$。

(2)　$X_+0=X_+\overrightarrow{XX}=X$。

(3)　X_+xが定義されるとき，$x=\overrightarrow{XY}$と書けて，$X_+x=Y$。また，$x>0$は$X<Y$と同値。

3.6 内算法＋が定義されていない場合

3.6.1　(Q，≦)の条件

Qが離散の場合には，つぎの何れかであるとする：

(1)　下に有界。このとき

(1-1)　“ペアノの公理”を満たす．

(1-2)　$X<$（Xの後者）．

(2)　下に非有界。このとき

(2-1)（“ペアノの公理”に準ずる）つぎの条件を満たす：

1°　双射(註) $f:Q\longrightarrow Q$がとれる——$X\in Q$に対し$f(X)$をXの後者と呼ぶ；

2°　Qの部分集合Q'は，つぎの条件を満たすときQと一致している：《$X\in Q'$に対し，Xの後者も，Xを後者とする$Y\in Q$もQ'に属する》．

(2-2)　$X<$（Xの後者）．

これらの条件は，下に有界なQと下に非有界なQのそれぞれのイメージ

$$\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\cdots\cdot$$

$$\cdots\cdot\longrightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\bigcirc\rightarrow\cdots\cdot$$

を述べたものである（§2.1.2参照）。

Qが稠密のときには，つぎの何れかであるとする：

(1)　下に有界。このとき，群構造をもつ稠密量(D，≦，＋)と，(Q，≦)の(D^+，≦)の上への順序同型iがとれる。

(2)　下に非有界。このとき，群構造をもつ稠密量(D，≦，＋)と，(Q，≦)の(D，≦)の上への順序同型iがとれる。

（註）関数$f:X\longrightarrow Y$が“双射”（“全単射”とも言う）であるとは，それが全射（各$y\in Y$に対し$f(x)=y$となる$x\in X$が存在する）かつ単射（$f(x)=f(x')$ならば$x=x'$）であること。

3.6.2　“差”の系

(Q，≦)から“差”の系((D，≦，＋)，($\mathbb{N}_{DR}$，≦，＋，×)，$_\times$)を導出する。

3.6.2.1　(Q，≦)が離散の場合

各$X\in Q$にそれの後者を対応させる関数$f:Q\longrightarrow Q$のn回の合成f^nに対し，$f^n(X)=Y$のことを“YはXから上にn”，“XはYから下にn”と言い表わすことにする。

集積合$Q\times Q$の上の同値関係$(X,Y)\sim(X',Y')$を，つぎの条件で定義する：

(1)　$X<Y$，$X'<Y'$，かつ或る自然数nに対しY，Y'はそれぞれX，X'から上にn；

(2)　$X>Y$，$X'>Y'$，かつ或る自然数nに対しY，Y'はそれぞれX，X'から下にn；

(3)　$X=Y$，$X'=Y'$．

～による$Q\times Q$の商集合をDで表わし，$(X,Y)\in Q\times Q$が属する同値類を$\overrightarrow{XY}$で表わす。また，$\overrightarrow{XY}$を，YがXから上にnのとき“上にn”，下にnのとき“下にn”，$X=Y$のとき“零”と，それぞれ言い表わす。

Dの上の内算法$x+y$を，つぎのように定義する：

(1)　$x+y=y+x$；

(2)　xが零のとき，$x+y=y$；

(3)　xが上にmのとき

(3-1)　yが上にnのとき，$x+y$は上に$m+n$；

(3-2)　yが下にnのとき，

(3-2-1)　$m>n$ならば$x+y$は上に$m-n$；

(3-2-2)　$m=n$ならば$x+y$は零；

(3-2-3)　$m<n$ならば$x+y$は下に$n-m$．

(4)　xが下にmでyが下にnのとき，$x+y$は下に$m+n$．

Dは＋に関して可換群となる——$\overrightarrow{XX}$の形の元（即ち，零）が零元；$\overrightarrow{XY}$に対し$\overrightarrow{YX}$がこれの対称元，あるいは，上にnと下にnは互いに他の対称元。

Dの上の全順序関係$x\leqq y$を，つぎのように定

義される関係$x<y$に対する“$x=y$あるいは$x<y$”として，定義できる：

(1) $x<y$ならば$-x>-y$；

(2) xが零のとき，或る自然数nに対し，yは上にn；

(3) xが上にmのとき，或る自然数$n>m$に対してyは上にn；

Dは＋と≦に関して，離散な順序群になっている。特に，離散量$((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times})$になっている。

3.6.2.2 $(Q, \leqq)$が稠密の場合

$(Q, \leqq)$は，群構造をもつ離散量$((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times})$と，$(Q, \leqq)$の$(D, \leqq)$の中への埋め込み$i$を随伴する——但し，$i$は，$(Q, \leqq)$が下に有界のときは$(D^{+}, \leqq)$の上への同型で，下に非有界のときは$(D, \leqq)$の上への同型である（§3.6.1)。

いま，$Q\times Q$の上の同値関係$(X, Y) \sim (X', Y')$を，つぎの条件で定義する：

$(-i(X))+i(Y)=(-i(X'))+i(Y')$

$\sim$による$Q\times Q$の商集合を$\hat{D}$で表わし，$(X, Y) \in Q\times Q$の属する同値類を$\overrightarrow{XY}$で表わす。

$\hat{D}$とDの間の１対１対応$\phi: \hat{D} \longrightarrow D$が，

$$\phi(\overrightarrow{XY})=(-i(X))+i(Y)$$

と定義することで得られる(註1)。いまϕによって$\hat{D}$とDを同一視する。このとき，つぎのことが成り立つ(註2)：

$$-\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{YX};$$
$$\overrightarrow{XX}=0;$$
$$\overrightarrow{XY}>0 \iff X<Y.$$

（註１）Dの定義から，ϕは well-defined でかつ１対１。また，$x\in D^{+}$と$X\in Q$に対し，$Y=i^{-1}(i(X)+x)$とおくと，$\phi(\overrightarrow{XY})=(-i(X))+i(Y)=(-i(X))+i(X)+x=x$，$\phi(\overrightarrow{YX})=(-i(Y))+i(X)=(-i(X))+(-x)+i(X)=-x$。また$\phi(\overrightarrow{XX})=0$。よって，$\phi$は全射。

（註２） $-\overrightarrow{XY}=-((-i(X))+i(Y))=(-i(Y))+i(X)=\overrightarrow{YX}$。$\overrightarrow{XX}=(-i(X))+i(X)=0$。$\overrightarrow{XY}=(-i(x))+i(Y)>0$は$i(X)<i(Y)$と同値，そして後者は$X<Y$と同値。

3.6.3 系$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$

量$(Q, \leqq)$とこれから導出される“差”の系$((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times})$に対し，$Q$の要素$X$に対する$D$の要素$x$の作用（“併進”）$X_{+}x$を，§3.5.8のときと同様に定義する。

$(Q, \leqq)$と$((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times})$が作用$_{+}$でつながっている系を，$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$で表現する。

3.7 量の一般形$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$

これまでに登場して来た“量の系”のどれに対しても，$((Q, \leqq), ((D, \leqq, +), (\mathbb{N}_{DR}, \leqq, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$の解釈が立つ。そこで，これを量の一般形と定める。