“１、２、３、・・・・”再考

金沢大学教育学部　宮　下　英　明

1. 数詞のシステムができるまで

“数詞のシステムができるまで”とは言っても、人類の歴史の中で数詞のシステムが登場する過程を繰り返そうというのではありません。もともと本当のところはわからないのですし。

ここで述べようとするのは、わたしたちの知る数詞のシステムの“論理”的な登場のさせ方です。

1.1　“カズを感じてしまう”ことが前提

数詞を登場させるために、わたしたちのカラダには“カズを感じてしまう”傾向があるとしましょう。即ち、何かが自分にとって熱かったり、白かったりと全く同じ具合に、何かに対して自分が受け止めるものがカズである場合があるということです。

例えば、つぎのような状況を想像してみましょう。日に何回か空から“ドーン”と音がする。いつその“ドーン”がくるかはわかりません。そして、一日の“ドーン”の回数は一定ではない。さて、これが毎日続くとどうなるか。“ひとはカズを感じてしまうだろう”というのが、ここでのわたしたちの仮定です。はじめに“カズを感じてしまう”をカラダの傾向として前提するといったのは、こういう意味です。

1.2　カズ

前節で、“カズ”という言い回しを出してきましたが、どういう意味合いでこの言い回しを用いようとしているのかについて、ここで述べておきます。

例えば、花から“色”を受け止めるとき、“色”はことばなんだということはいいですね。そしてこのとき、“色”の言い回しで指しているものが、意識の上で、ことば以前のものとしてあるわけですね。でも、このことば以前のものを対象として扱おうとするときには、これをことばにしなければならない。で、意識の上のこのことば以前のものを、この場合“色”と言っているわけです。

“カズ”という言い回しは、ここではこの“色”と同じ意味合いで使うことにします。ややこしい言い方になりますが、ここで言う“カズ”とは、“カズ”ということばで意識されているところの意識の上の対象のことです。

ここまで“意識の上”という言い回しを、下線の強調つきで、三回用いてきました。強調したかったことは、フィクションなんだということです。前節の例で言うと、空からの“ドーン”は、それだけのものであって、それ以上でも以下でもない。しかし、ひとが空からの“ドーン”に対していまや意識するようになっているカズは、空からの“ドーン”そのものではないですよね。

1.3　カズの表現

空からの“ドーン”では、カズは類として意識されています。即ち、“色々なカズ”のように意識されています。“昨日の“ドーン”は、二日前の“ドーン”とは違っていたが、三日前のとは同じだった”という具合です。

さてわたしたちはつぎに、ひとはこのカズの表現に向かうとしましょう。

このとき　どんな表現が　可能でしょうか。色々考えられるでしょう。でもここでは、わたしたちの知る数に向かわせる都合から、つぎのような表現が起こるとしましょう。

即ち、一日の最初の“ドーン”で、右手の親指にゴム輪をつける。つぎの“ドーン”では、ゴム輪を右手の人差し指につけ直す。つぎの“ドーン”では、右手の中指につけ直す。以下同様に、ゴム輪をつぎの順で移動していく。

…—— 右手 ——┐

→　薬指　→　小指

┌——— 左手 ———┐

→親指→人差指→中指→薬指→小指

“これより先はどうするのか？”輪ゴムの移動を例えば足の指へと延長してやっていくというように話を展開することもできるのですが、ここでは再び、われわれの知る数詞に向かわせる都合から、ここでは左の小指で打ち切りとしておきます。

さて、ひとはこのとき、ゴム輪が最後に残っている指を指示することばで、“ドーン”のカズを表現できることになります。“昨日は右手の薬指、一昨日は左手の親指、その前は右手の薬指”のように。

確認しておきますが、このときの指のことばの意味は指そのものではありませんよ。意識の上では、ゴム輪のある指は“ドーン”のカズですね。

ここで用語を導入しておきましょう。空の“ドーン”に対して先の規則で指のゴム輪を移動することを、“ドーン”を数えると言います。あるいは、“ドーン”の計数といいます。

つぎに、この表現が以下のように簡素化されるとします：

“右手の親指”　→“いち”(表記“1”)
“右手の人差し指”→“に”　(表記“2”)
:
:
“左手の薬指”　→“く”　(表記“9”)
“左手の小指”　→用意しない

“左手の小指”に対してなぜ“じゅう”を対応させないのかと思われるでしょう。でも、わたしたちの知る数詞に向かうためにはこれでよいのです。次節でこのことを明らかにしましょう。

またここでもう一度、最初に述べたことを確認しておきましょう。これはあくまでもわたしたちの知る数詞のシステムの“論理”的な導出の話であって、数詞のシステムの歴史の話ではありません。但し表現の簡素化の話は、それほど強引でもありません。実際、数詞の語源を調べていくと往々にして指のことばにつきあたるということですから。

1.4　カズの位取り表現

前節でカズの表記

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

を得るところまで来ました。これを有効に使わない手はありません。そこで、つぎのような機械をつくることにしましょう。

この機械には、押しボタンと、1, 2, 3,…, 9が表示される窓があります。ボタンを押す度に窓の表示が

無表示 → 1 → 2 → … → 9
↑________________________|

の順番で変わっていきます。

これだけの機能で、空の“ドーン”(相変らずですが、もうしばらくこの例でやっていきます)のカズが得られます。

先ず、日が改まるとき無表示にします(即ち、“ご破算”です)。そして、“ドーン”が鳴る度にボタンを押します。結果として、日が改まる直前の表示が、その日の“ドーン”のカズということになるわけです。但し、無表示はその日に“ドーン”が無かったことを示します。

と言うと、直ちに反論が起こるでしょう。
“例えば表示“2”には、

＊→1→2
＊→1→2→…→9→＊→1→2
＊→1→2→…→9→＊→1→2→…→9
→＊→1→2
:
:

(＊は無表示を表わす)

のような無限のケースがある”、と。確かにそうです。この方法は失敗です。でも機械が失敗というようにはなりません。

実際、単体のままだと失敗しますが、同じ機械を複数個用いるとだいじょうぶです。

差し当たって、機械四つではじめます。この四つに“一”、“十”、“百”、“千”と名前をつけておきましょう。そして計数をつぎのようにします。

一の表示が

→1→2…→9→

のように一巡する度に、十のボタンを押します。十の表示が一巡する度に百のボタンを押します。そして百の表示が一巡する度に千のボタンを押します。

一が“ドーン”を数えているのに対し、十は一の表示の一巡を数えていることになりますね。同様に、百は十の表示の一巡を、千は百の一巡を、それぞれ数えていることになります。

さて、このときのカズの表現は、“一が3、十が5、百が1、千が2”といった具合です。もっとも、こんなに“ドーン”が鳴ってはたまったものではありません。そろそろ“ドーン”の話から離れるときがきたようです。このあたりからぼつぼつ、カズの話はことばだけの閉じた世界に入っていきます。

1.5 位取り記数法

ここまでで、わたしたちは

“一が3、十が5、百が1、千が2”

のようなカズ表現に到達しています。つぎの発展は、この表現の簡素化です。

先ず、“が”をおとしてみましょう。

“一3十5百1千2”

ここでさらに機械の名の一、十、百、千をおとせば、表現は半分の長さになりますね：

“3512”

はじめと比べると、随分スリムになりました。しかし、このままでは誤読が生じそうです。例えば、“千が3、百が5、十が1、一が2”のように読まれてしまうかも知れません。

ここで、“一3十5百1千2”の表現で一、十、百、千が何に効いているのかと考えてみましょう。“3”、“5”、“1”、“2”のそれぞれを身分づけることということに効いているわけですね。そしてこれだけのことなら、“3512”だけでだいじょうぶというようにできます。即ち、左端は機械一の表示、その一つ右は機械十の表示、その一つ右は機械百の表示、そしてその一つ右は機械千の表示というように約束しておけばよいのです。

“身分づける”は“位をつける”とも言えますね。そこでこの表記法のことを、位取り表記法と呼びましょう。

さて、機械一、十、百、千は位を定めるものになっているわけですが、ここで“位を定めるもの”を強引に“位そのもの”と読み直して、一、十、百、千に対し“位”という読み方もすることにしましょう。さらに、二つの機械x、yが、xの表示が一巡する度にyのボタンを押すという関係にあるとき、位としてのyは位としてのxよりも高い、あるいは上、と言うことにします。そこで、位一、十、百、千は、この順に高くなっていることになります。

1.6 “0”

位取り表記はとてもスマートなのですが、ここに一つ問題が生じます。それは、無表示の機械があるときにどうするかということです。例えば、“一が3、十が無表示、百が1、千が2”のときです。これを“312”のようにつめてかくわけにはいきませんね。これでは“一が3、十が1、百が2”と読まれてしまい、意味が違ってしまいます。では

“3 12”

のように十の場所をあけておきましょうか。しかしこれでは、意図して離しているのか、書いているときたまたま離れてしまったのか、区別がつきませんね。また、“一と十が無表示、百が2”のときはどうしますか？

というわけで、位取り表記では、“無表示”を表わす記号を導入することが必要になります。記号はそれとわかれば何でもいいのですが、わ

たしたちは“０”を使っていますね。

０はこのように、1,2,…，９と同類の記号ではありません。それは、1,2,…，９とは異質のものなのです。

1.7　カズの表現でのわたしたちの慣習

わたしたちは、“一３十５百１千２”のような言い回しをしないで、“２千百５十３”と言います。即ち、機械の名をそれの表示の後に置き、そして高位の方から読みはじめます。またこれに対応して、位取り表記も高位の方から書きます。

言い回しではさらに、一の表現および位置と異なる位につく１の表現を省略しています。また、機械の無表示についても、“２千百３”のように、これの表現を省略します。

1.8　千より上の位

論理的には、位はいくらでも考えることができます。但しそれは、“いくらでもある”と考えられるだけです。このときには、位は現実のものになっていません。位は、これに対する言い回しをつくって、はじめて現実のものになります。

そこでつぎに、千より上の位をどのような言い回しで導入していくかという問題になります。

“一”、“十”、“百”、“千”の調子で、異なる語をつぎつぎとつくっていくことも一つの手です。しかしこれはかなり苦しいやり方です。つくるのも大変ですが、覚えるのも大変です。わたしたちは、つぎのような方法でこの問題を解決しています。

機械一、十、百、千をワンセットにした機械を導入し、これに“万”の名を与えます。同じ機械をまた導入し、これに“億”の名を与えます。さらに“兆”の名で同じ機械を導入します。この導入はいくらでも考えられますが、いまは“兆”で止めておきましょう。そして、最初の一、十、百、千に続く位をつぎのように名付けます：

一万、十万、百万、千万、
一億、十億、百億、千億、
一兆、十兆、百兆、千兆、

但しわたしたちの慣習では、一万、一億、一兆を、一を省略して単に、万、億、兆としています。

なお、位の名のこのつくり方でいうと、最初の一、十、百、千のワンセットにも何か名が与えられているべきなんでしょうが、現実にはそうはなっていません。実際、そんなことをしては、言い回しがひどくうるさくなってしまいます。実用の上で無くて済む表現はどんどん省略するというのが、生活人としてのわたしたちの傾向です。

但し最初の一、十、百、千のワンセットに対する名のこの省略によって、万、億、兆を一、十、百、千と同類の位の名のように誤解する傾向が生じるようになります。位の一が表現からいつも省略されているということも、この誤解のもう一つの原因になっていますが。

2　“数”が意識の上の対象になる

2.1　系列としての自然数

カズのことばとして数詞をシステマチックに開発してきたわたしたちは、つぎに以下のような思いにとらわれたとしましょう：

《“1,2,3,…”って、一体何なんだろう？》

つまりわたしたちは、つぎのような問題意識をここで持つわけです。

《“1,2,3,…”はこちらが勝手に与えた名だ。他の名でもよかった筈だから、“1,2,3,…”の意味は、これの見掛けの背後にあることになる。さて、それは何か？》

わたしたちはつぎの結論に至ります：

《“1,2,3,…”とは、所詮系列のこちだ！》

但しここで“系列”とは、

○→○→○→…

のような図式でイメージされるようなもののことです。そしてわたしたちの意識の対象になっ

たこの系列が、“自然数”です。

また、これまでカズのことばであった“1, 2, 3,…”は、このときから意識の上では、数のことばとしての数詞になります。

2.2 自然数を定義する

ここまでともに歩んで来たわたしたちにとって、自然数は図式

○→○→○→…

でイメージされるところのものになっています。そしてこの限りで、自然数は“系列”と同じです。そこで“系列”の意味を明らかにすることが、そのまま自然数の意味を述べることになります。

もちろん、“系列”の意味は自明だというところで終わってしまってもよいのです。しかしここでもうちょっと頑張るのが数学です。

系列としての自然数は、“ペアノの公理”という形をとって定義されます。解説は後に回して、先ずこの定義を述べてしまいましょう。

“系列”とは、先ず、集合Eと、Eの一つの要素1と関数 f：E→Eの組

（E、1、f）

である。そしてこれについて、以下のことが成立している：

(1) f(x)＝1となるEの要素xは存在しない：

(2) Eの要素x、yについてf(x)＝f(y)ならばx＝y：

(3) Eの部分集合E′は、つぎの条件を満たすとき、実はEと一致している：

1がE′の要素になっている：

xがE′の要素のとき、f(x)もE′の要素。

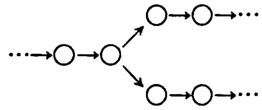
何のことがさっぱり、という感じですが、これで系列の定義になっているのです。実際、ペアノの公理は“コロンブスの卵”なんです。

先ず、系列の図式

○→○→○→…

に対し、これの項全体の集合が集合Eです。そして先頭の項が1です。fは、各項にその直後の項を対応させる関数です。

fが対応一般（一つの要素に複数の要素が対応することを許す）ではなく、一意対応（一つの要素に一つの要素が、しかもただ一つの要素が、対応する）としての関数であるという点は、本質的です。系列の図式は、

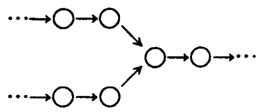


のように枝分かれするものではありませんね。この枝分れを禁止するのが、fが一意対応であるという条件です。

何の後でもないことが“先頭”の意味ですね。そこで、条件(1)によって、1を先頭として定義しています。

しかしここで、先頭が一つに限るのかどうか心配になってきます。

他にも先頭があったとしましょう。このとき、別々の先頭から出発する列は先でつながることはありません。というのも、条件(2)によって



の形が禁止されているからです。そこで可能性として残るのは、Eが互いに独立した複数の系列で成るという状態です。しかしこの状態は、条件(3)によって禁止されています。実際、

$$\left.\begin{array}{l}①\to○\to\cdots\quad : E' \\ \\ ○\to○\to\cdots\end{array}\right\} E$$

のようにE′をとると、E′は(3)の中のE′の条件を満たしていますからE′＝Eでなければなりません。結局、Eは一本の系列でなければならないことになります。

また、条件(2)は、系列がどこかで終わる状態

…→○→○→○

を禁止することにも効いています。実際

$$\cdots\to○\to\overset{y}{○}\to\overset{x}{○}$$

とすると、これはx＝f(y)かつx＝f(x)の場合

です。ところがこのときは条件(2)より x = y でなければなりません。

2.3 自然数の順序構造

“自然数”ということばは、項の類としての系列を指すときに用いられる他に、個々の項を指すときにも用いられています。わたしたちは混乱を避けるために、“自然数”のことばは単独では専ら前者の意味で用い、後者の場合には“自然数の要素”、“自然数２”、“個々の自然数”のような言い回しにおいて用いることにします。

さて、自然数の二つの要素 x 、 y の間の関係として、“ y は x よりも後”を、ここで導入しましょう。但しこれの意味は、

$$\cdots \rightarrow x \rightarrow W_1 \rightarrow \cdots \rightarrow W_n \rightarrow y \rightarrow \cdots$$

となる W_1 、…、 W_n が存在するということです。またこのことを“ x < y ”と書くことにしましょう。さらに、“ x < y あるいは x = y ”を“ x ≦ y ”と書くことにします。

このように定義した関係≦は、順序関係になっています。ここで順序関係とは、以下の条件で定義される関係のことです：

(1)　x ≦ x　　　（反射法則）：

(2)　x ≦ y かつ y ≦ x ならば x = y　　　（反対称法則）：

(3)　x ≦ y かつ y ≦ z ならば x ≦ z　　　（推移法則）：

さらに、≦では条件

(4)　任意の x 、 y に対し、 x ≦ y あるいは y ≦ x　　　（比較可能）

が満たされています。この条件が加わった順序関係は、同じ順序関係でも特に全順序関係、あるいは線形順序関係、と呼ばれます。

こうして、系列としての自然数には、(全) 順序関係が定義されることになり、またこの意味で、(全) 順序構造が与えられることになりました。但し、これが自然数において考えられる唯一の構造ではありません。自然数の構造としては、この他に代数的な構造（さらに位相的な構造）が考えられることになりますが、これについてはまたの機会に。