筑波数学教育研究第３号　1984.３

量と数について

金沢大学教育学部　　宮　下　英　明

はじめに

“量と数”は算数科の第一の主題であるが，＜使える＞こととは別の＜意味理解＞というレベルになると，教師自身にとっても，大変な問題になってくる。

一時，“数学セミナー”誌上で，量と数の問題が盛んに論じられたことがあった。特にそこで，数が量の比として定式化され，その構成法が論じられたりした。そして，算数・数学教育に対する問題提起の意味を含めて，“数は量とは違う”ということが，このようなコンテクストからスローガン的に一つの結論として打出された。しかし，“数は量とは違う”とは言っても，数は現実に“普遍的量”（〔２，p.46〕）として機能させられている。実際，われわれは同一の数に，量としての構造と量とは違うものとしての構造とを，ともに認めることが出来る。“量に対する数”というコンテクストにおいても，数の＜身分＞は単一ではないのである。

本論文では，量についての簡単な認識論的考察から入って，量の論理的構成を論じ，そしていま述べた数の＜身分＞というものについて考察してみることにする。

Ⅰ．量＝＜記号＞の量

量は，それが＜実在＞として認識の対象になるときは，あくまでも（量を担っている）何かの量である。そしてその何かは，具体物そのものではなく，一つの認識形式を通過して＜実体＞化されたところの記号的存在である。例えば“長さ”は，記号的存在としての＜線分＞の長さである。（“棒の長さ”を考えるとき，“棒”は明示的ではないにせよ“線分”に記号変換されている。）また，“石の重さ”は，石を持ったときに被る肉体的負担とか，それを＜はかり＞に乗せたときの物理的結果とかの大きさである。

ここで確認したことは，量を考える上で本質的である。実際，量は，＜記号＞の量であることによって，＜物＞の個別性を障碍としないで＜物＞の上に均しく認めることのできるようなものとなっているのである。(註)

量を担う実体としての＜記号＞の普遍性は，この量概念の適用の広さと対応している。そして，この普遍性は歴史的に獲得されてきたものの筈であり，その意味で，普遍性の度合は社会に依存的である。原始的な数概念について指摘される“即物的”性格は，量概念についても言えると思われる。

量が＜記号＞の量であることに因るそれのもう一つの著しい特徴は，＜実在＞からの形式的“自立”である。量の或る大きさが現実的なものかどうかという問題を，規約を設けることによって量の議論の外に置くことが可能になる。例えば，筆者は10^{-100} mという長さが現実的なものかどうかを知らない。しかし，量の稠密性の議論では実験的にそのような長さを扱っている。

(註) 例えば，地上の二物体間の＜距離＞と身の＜丈＞というものを同じく＜長さ＞としてわれわれが扱っているという事実は，改めて考えてみるならば，奇蹟とも言うべきであるが，この奇蹟の大部分は，二現象をともに＜線分＞に記号変換することがで

きたという一点にある。

Ⅱ. 量を実体化する論理

量の形式的議論 ── 特に数学的議論 ── は，“或るものの量”ではなく“量そのもの”を扱う。そこでは，量は＜実体＞概念として成立している。では，量はどのようにして，量を担う存在（＝記号）から離れて実体化するのか。

本章では，量の実体化の過程が実際の歴史の流れの中でどうであったのかということではなく，量を実体化する論理的（形式的）方法を考えることにする。

量の実体化の出発点は，量を担うもの同士に関する＜関係＞概念であろう。“量”概念の発生の歴史的経緯ということでも，それは先ず＜関係＞概念として，起こっていると想像される。即ち，“より多い・大きい”という概念，そしてそれと同時の契機のものである（量的に）“同じ”という概念から，“量”概念の発生は始まる。

このような関係に陰伏されているものとして“量”が実体化される仕組みは，論理的には，“同じ”ものが一つの“多さ・大きさ”の具現とみなされ，反照的に“多さ・大きさ”が実体として概念化されるというものである。

歴史という現実においては，量の実体化はあくまでも，その形式の段階的洗練・純化という過程としてあり，＜比較＞・＜測定＞の実践がこのような諸相の契機となっている筈である。そして量が実体化される形式と測定の形式は，弁証法的に相互発展する。よって，現実においてはむしろ≪測るから量がある≫のであり，論理としての≪測らなくとも量はある≫の逆になる。

＜関係＞概念から＜実体＞概念を導く論理として，数学には，同値関係から同値類を作り，その同値類を一個の対象として改めて見直すというのがある。例えば，集合に関する“対等”の概念から“基数”の概念を導く論理がそれである。“量”の実体化も，この論理を用いて行なうことが出来る。

例えば，“長さ”をユークリッド空間内の線分に関するもの（前章参照）とすると，それはつぎのように実体化される。即ち，二本の線分の間の同値関係～として“合同”の関係を考え，線分全体の集合$\mathcal{M}$をこの関係で割った商$\mathcal{M}/\sim$の各元を，個々の＜長さ＞とする。よって，各線分Aに対し，Aの属する同値類〔A〕がAの長さということになる。長さの大小関係〔A〕＜〔B〕は，AがBの真部分に合同ということで定義できる（この定義が代表元A，Bのとり方に依らないことは明らか）。

各“量”の特殊性は，それの実体化のプロセスにおいては，同値関係～（これは，大小関係＜と同時の契機のものである）の規定の特殊性となって出てくる。上述の＜長さ＞の場合では，線分の＜重ね合せ＞という（物理的）操作が，同値関係の定義を与えている。そして，この操作が幾何学の中で数学的に定式化されているものであるために，＜長さ＞は数学の対象になっている，と言うこともできる。逆に同値関係を規定する概念が数学的に定式化されていないような量は，数学的対象にならないということになる ── 例えば，＜質量＞を実体化する同値関係を与える概念は加えられた力に対する＜動き易さ＞であり，これは数学の対象ではない。

量を実体化する＜数学的＞論理は，したがって，同値関係～の＜意味＞を最初から捨象した形のものである他ない。即ち，（量がそこにおいて考えられるところの対象がつくる）集合$\mathcal{M}$と，$\mathcal{M}$における同値関係～と，$Q=\mathcal{M}/\sim$の二元の間の推移的関係＜（“大小関係”）が，先ず与えられる。**但し，＜は，**

任意のa，b $\in$ Qに対し，a＞b，a＝b，a＜b のいずれか一つ，かつ一つのみが成立つ

ようなものであることが要請される。このとき，各A $\in\mathscr{M}$ に対しAの属する同値類〔A〕がAの担っている量として読まれ，〔A〕＝〔B〕，〔A〕＜〔B〕がそれぞれ，量が"AとBにおいて同じ"，"AにおけるよりBにおいて多い"と読まれる。(註)

(註) 因に，〔5，(2)〕での量の規定は，＜同値類＞というワン・ステップをおいていないために，例えば＜長さ＞に読み直そうとするときには，非常に困難を感ずるようなものになっている。ここでの量の規定の仕方によるとき，〔5，(2)〕での"仮定" 2°，5°には，それぞれつぎのものが対応する：

A，B $\in\mathscr{M}$，A $\supset$ Bならば〔A〕≧〔B〕；
A，B $\in\mathscr{M}$ に対し，〔A〕＞〔B〕ならば，C $\subset$ A，〔C〕＝〔B〕なるC $\in\mathscr{M}$ が存在する。

Ⅲ．量の加法

3－1　量の加法

量の中には加法の考えられているものがある。（逆に，加法の考えられていない量もある。）その加法は，具体的な量に対するものではあっても，実質的に，無内容な＜形式＞としてある。例えば"長さ"の等式：2m＋3m＝5mで，2m＋3mに内在する＜意味＞は何もない。＜意味＞は＜解釈＞として外から与えられるのみである。

量の加法の＜解釈＞とは，形式としての量の加法が適用できる＜モデル＞を与えることである。このモデルが数学的対象になるとき，量の加法の＜意味＞を扱うことが数学の場でも可能になる。しかしそうでないとき，数学が量の加法を扱えるのは，＜形式＞の次元に限られる。

加法の＜解釈＞が数学の場の中で可能になる量の例として，"長さ"を挙げることができる。前章で定義したものとしての"長さ"の場合，加法は，二つの線分を繋ぎ合わせて一つの線分をつくるという（物理的）操作を＜意味＞として持つ。即ち，長さa，bの和a＋bは，つぎの条件を満たす線分Cの類 **c**＝〔C〕である：

線分A，Bで，A $\cup$ B＝C，A $\cap$ B＝一点，〔A〕＝a，〔B〕＝bなるものが存在する。

この加法は交換法則および結合法則を満たす。また，加法の逆算としての減法が，a＜bなる長さa，bに対しての差b－aをつぎの条件を満たす線分Cの類 **c**＝〔C〕として定義することによって，与えられる：

線分Aで，C $\cup$ Aが線分でC $\cap$ Aが一点，かつ〔A〕＝a，〔C $\cup$ A〕＝b，なるものが存在する。

つぎに，量の加法が（＜意味＞抜きの）＜形式＞の次元で扱われる場合を考えよう。このときには，加法は＜公理＞によって規定される。先ず，量Qの加法は交換法則，結合法則を満たすものとされる：

(3.1.1)　$a+b=b+a$

(3.1.2)　$(a+b)+c=a+(b+c)$

これに大小関係＜と加法＋との関連を規定する公理が続くことになるわけであるが，このとき選択の余地が幾分ある。

関係＜は，普通，a＜bが≪ $a+c=b$ となる $c\neq 0$ が存在する≫と定義されることによって，加法の後に導入されることが多い。（そしてまた，cの一意性を保証する公理が予め用意されていて。減法が定義されることになる。）しかしここでは，＜加法＞以前に（大小）＜比較＞はあり且つ＜比較＞は量概念の契機であるという認識から，そしてまたこの点を量の論理的構成にも反映させたいという気持ちから，関係＜は既に導入してある（前章）。

関係＜と加法＋との関係を定める公理として，先ず，つぎのものをおく：

(3.1.3)　$a<b \Rightarrow a+c<b+c$

また，零（ゼロ）の量0 ── 最小量かつ加法の零元 ── の存在をここでは仮定しないで，

（3.1.4） $a < a + c$
を公理としておく。

さて，関係 $a < b$ を特徴づけるものとされている条件≪ $a + c = b$ なる $c \neq 0$ が存在する≫をどう扱うかの問題であるが，ここでは $a < b$ の含意として，“ a と b の間には隙間がある”という緩い形のものをとるにとどめ，

（3.1.5） $a > b$ ならば，$a + c \leqq b$ なる c が存在する。

を公理としておこう。

なお，二量 a，b に対して $a > b$，$a = b$，$a < b$ のうちのただ一つが成立つから，(3.1.3）はつぎの含意関係を導く：

（3.1.6） $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

3－2　離散量，稠密量，連続量

量Qは，さらに，公理：

（3.2.1）任意の $a \in Q$ に対し $b < a$ なる $b \in Q$ が存在する。

を満たすか，それの逆：

（3.2.1）′ $1 \in Q$ が存在して，すべての $a \in Q$ に対し，$1 \leqq a$ となる。

を満たすかで，所謂“連続量”と“離散量”とに分けられる。ここで“連続量”という命名は，

（3.2.2） $a < b$ のとき，$a < c < b$ なる c が存在する。

という＜稠密性＞を念頭においたものであるから，むしろ“稠密量”と呼ぶべきものである。そして，“離散量”とは，(3.2.2)の逆の性質を持つものではなく，性質：

（3.2.2）′ 各 a に対し，ある $a' > a$ があって，$a < b < a'$ となる b が存在しない。

(このとき，a' は一つしかないことになる）を持つもののことである。

（3.2.2)，(3.2.2)′ は，量体系Qの一つの＜等質性＞を示しているものであるのに対して，(3.2.1)，(3.2.1)′ は，直接的には，そうでない。ところが，公理（3.1.5）によって，（3.2.1）と（3.2.2)，および（3.2.1)′ と (3.2.2)′ が，それぞれ同値になる（したがって，（3.2.2)′ が，（3.2.2）の逆になる）のである。

（3.2.1)′ と（3.2.2)′ の同値性だけを，ここでは示そう。（3.2.1)′ から（3.2.2)′ を導くには，$a' = a + 1$ とすればよい。また，(3.2.2)′ を仮定すると，（3.1.5）から，各 a に対して $a + 1_a = a'$ なる $1_a \in Q$ が存在することになる。1_a はすべて同じ $1 \in Q$ であって，仮定からこの 1 は（3.2.1)′ の中の 1 であることがわかる。

特に，この証明から，離散量とは ある量 1 に対する 1，1＋1，1＋1＋1，……全体で構成されているものであるということが結論される。

さて，有理数から実数を構成する方法に倣って，稠密量の公理につぎの＜連続性＞の公理をつけ加えれば，量の新しいカテゴリーが得られる（cf.〔4〕)：

（3.2.3）Qのデデキント切断は，つねに切り口を持つ。

但し，Qのデデキント切断とは，Qの空でない二つの部分集合 Q^-，Q^+ の対で，$Q^- \cup Q^+ = Q$，$Q^- \cap Q^+ = \phi$，かつすべての $a \in Q^-$，$b \in Q^+$ に対して $a < b$，ということが成立つもののことである。そしてこれが切口を持つとは，$\max Q^-$，$\min Q^+$ のいずれかが存在することである。この＜連続性＞の公理を満たす稠密量のことを，〔4〕での命名，また〔6，Ⅲ，p.71〕での田村氏の指摘に沿って，ここでは“連続量”と呼ぶことにしよう。これに対しては，アルキメデスの公理が成立つ（〔4，p.65，命題1，5〕)。

Ⅳ. 量の比

数は，＜量の比＞として量から形式的に導出できる。しかし，歴史という現実においても数は＜量の比＞として起こっているのである：

“エウドクソスにとって，ある与えられた種類の量は，一つの内算法（加法）をもった

体系を形づくっているが，この体系はまた，量の比を作用素とする一つの外算法をもっていて，その作用素はアーベル乗法群をなすと認められる……エウドクソスの天才的な考えの結果，あらゆる種類の量によって定義される種々の作用域を互いに同一視することができるようになった……こうして組立てられた普遍的な作用域は，ギリシャの数学者にとって，われわれの場合の実数の集合と同等の役割をもっていた。”（〔1，pp.174，175〕）

本論文では以下，数を量の比として量から導出する方法が論じられる。但し，筆者のここでの意図は，われわれの知っている有理数やら実数を量をもとにして実際に構成してみるということではない。（そのような試みは〔6〕でなされている。）＜数＞というものをオモテに出さないで，＜量の比＞を量に対して自立させる方法を示すことである。ここでは，＜量の比＞は最後まで，それの解釈 ── 即ち，自然数か（正の）有理数か（正の）実数か ── に対してオープンなものとして，とどまる。

4－1　量の比

Qを，一つの量（例えば“長さ”）の体系で，$Q \times Q$上においてつぎの性質をみたすような同値関係～が定義されるようなものとする：

（4.1.1）任意の$a \in Q$と$(c, d) \in Q \times Q$に対して，$(a, b) \sim (c, d)$となるような$b \in Q$が存在する。

（4.1.2）$(a, b) \sim (a, c) \Rightarrow b = c$.

（4.1.3）$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (b, a) \sim (d, c)$.

((4.1.1)は“比例式の第4項の存在公理”(〔1，p.174〕)に対応する。) このとき，$(a, b) \in Q \times Q$の属する同値類を比$a : b$の形で表わすことにしよう。また商集合$(Q \times Q)/\sim$を$\mathcal{R}(Q)$で表わすことにしよう。

われわれの既に理解している量の比は，上の性質をみたしている。逆に，これらの性質は量の比における本質的な事実 ── 即ち，各々の比がQの倍変換に対応しているという事実 ── を特徴づけている。実際，以上の性質から，各同値類がQの変換（Qのそれ自身の上への1対1写像）のグラフになっていることが結論される。そこで，同値類ξに対し，これが定めるQの変換を$\bar{\xi}$で表わし，そしてξが$\mathcal{R}(Q)$を動くときの$\bar{\xi}$全体の集合を$\mathcal{E}(Q)$と表わすことにしよう。そして，Qの元aに対する$\mathcal{R}(Q)$の元ξの＜作用＞を，$\xi \cdot a = \bar{\xi}(a)$で定義しよう。この作用$\xi \cdot a$については，実は，aの“$\xi$倍”という読み方を念頭に置いている。そうすると$\bar{\xi} : a \mapsto \xi \cdot a$は，“$\xi$倍する”Qの倍変換ということになる。こうして，Qの量の比（：$\mathcal{R}(Q)$の元）とQの倍変換（：$\mathcal{E}(Q)$の元）が対応することになるのである。（ξと区別して$\bar{\xi}$と書くのは，ここだけにする。第一，ξが$\mathcal{R}(Q)$の元を指しているのか$\mathcal{E}(Q)$の元を指しているのかは文脈からわかることであるし，それに抑々，$\mathcal{R}(Q)$の元か$\mathcal{E}(Q)$の元かということは，同一のものの“見え方”の違いに過ぎないからである。）

$a, b \in Q$，$\xi \in \mathcal{R}(Q)$に対し，$\xi \cdot a = b$は$\xi = a : b$を意味する。したがって特に，$\mathcal{R}(Q)$はQに対して推移的に作用する。

なお，(4.1.3)は，$\xi \in \mathcal{E}(Q)$のときその逆変換ξ^{-1}も$\mathcal{E}(Q)$に属することを示している。

量の比ξ，ηに対して，つぎの条件は同値：

(1)　$\xi = \eta$；

(2)　ある$a \in Q$に対し，$\xi \cdot a = \eta \cdot a$；

(3)　すべての$a \in Q$に対し，$\xi \cdot a = \eta \cdot a$.

実際，$a \in Q$に対し，$\xi = a : \xi \cdot a$，$\eta = a : \eta \cdot a$だから，(1)，(2)，(3)は同値。

つぎの二つの条件は同値であるが，これを公理として定めよう：

（4.1.4）$a : b = c : d \Rightarrow a : c = b : d$

（4.1.4）′$\xi, \eta \in \mathcal{E}(Q)$に対し，$\eta \circ \xi =$

$\xi\circ\eta$.

実際，$\xi, \eta\in\mathcal{E}(Q)$ と$a\in Q$に対し，$a:\xi(a)=\xi=\eta(a):\xi(\eta(a))$だから，(4.1.4) を仮定すると　$\eta=a:\eta(a)=\xi(a):\xi(\eta(a))$，よって$\eta(\xi(a))=\xi(\eta(a))$。つまり，(4.1.4) から (4.1.4)′ が出る。

また，$a:b=c:d=\xi$，$a:c=\eta$ のとき，$d=\xi(c)=\xi(\eta(a))$，$b=\xi(a)$だから，$\xi\circ\eta=\eta\circ\xi$のとき $d=\eta(b)$，即ち$b:d=\eta=a:c$．よって(4.1.4)′ は (4.1.4) を導く。

また，量の大小関係に関しては，つぎの (同値な) 条件を公理とする：

(4.1.5) $a:b=c:d$，$a<b\Rightarrow c<d$.

(4.1.5)′ $\xi\in\mathcal{R}(Q)$ に対し，ある $a_0\in Q$で $a_0<\xi\cdot a_0$ なら，すべての$a\in Q$で$a<\xi\cdot a$.

(4.1.4) と (4.1.5) より，

(4.1.6) $a:b=c:d$ のとき，$a<c\Leftrightarrow b<d$.

これには，つぎの性質が対応する：

(4.1.6)′ $\xi\in\mathcal{R}(Q)$ に対し，$a<b\Leftrightarrow\xi\cdot a<\xi\cdot b$.

4－2　比の大小

前節で定義した＜量の比＞は，後になって＜数＞と読み直されるものである。本節では，数の大小関係になるところの比の大小関係を定義することにする。

量の比の大小関係＜は，つぎのように定義される。即ち，比$a:b$と$c:d$に対して$a:b<c:d$ とは，下の (同値な) 条件をみたすことである：

$a:b=c:d'$のとき $d'<d$；

$a:b=c':d$ のとき $c'<c$.

これが実際 "well-defined" であることは，容易に確かめられる ((4.1.4)，(4.1.6)を用いる)。

ここで，関係＜がいわゆる比の値の大小関係とは逆であることに注意されたい。このような定義にしているのは，$a:b$の大きさを "倍" $\xi:a\to\xi\cdot a=b$ の大きさとして見ようと思うからである。

定義より，

(4.2.1) $a:b<a:c\Leftrightarrow b<c\Leftrightarrow b:a>c:a$.

量の比ξ，ηに対し，つぎの条件は同値：

(1) $\xi<\eta$；

(2) ある$a\in Q$に対し，$\xi\cdot a<\eta\cdot a$；

(3) すべての$a\in Q$に対し，$\xi\cdot a<\eta\cdot a$.

実際，$a\in Q$に対し，$\xi=a:\xi\cdot a$，$\eta=a:\eta\cdot a$ だから，(4.2.1) よりこの結論を得る。

さらに，以下のことが成立つ：

(4.2.2) $a:b<c:d\Rightarrow b:a>d:c$.

(4.2.3) 関係＜は推移的である：

$$\xi<\eta,\ \eta<\mu\Rightarrow\xi<\mu.$$

(4.2.4) 量の任意の二つの比ξ，ηに対して，$\xi>\eta$，$\xi=\eta$，$\xi<\eta$ のいずれか一つ，かつ一つだけが成立つ。

実際，$a\in Q$に対し，$\xi\cdot a>\eta\cdot a$，$\xi\cdot a=\eta\cdot a$，$\xi\cdot a<\eta\cdot a$ のうち一つだけが成立ち，それぞれに $\xi>\eta$，$\xi=\eta$，$\xi<\eta$ が応ずる。

4－3　比の演算

つぎに，量の比の加法と乗法をつぎのように定義する：

$(a:b)+(a:c)=a:(b+c)$

(右辺の "$b+c$" はQにおける加法)，

$(a:b)(b:c)=a:c$.

但し，この定義が意味をもつようにするためには，つぎの仮定をおかなければならない：

(4.3.1) $a:b=a':b'$，$a:c=a':c'$ のとき，$a:(b+c)=a':(b'+c')$；

(4.3.2) $a:b=a':b'$，$b:c=b':c'$ のとき，$a:c=a':c'$

この条件は，写像：$Q\to Q$ に対してつぎのように定義される加法と乗法に関して $\mathcal{E}(Q)$ が閉じていることを意味する：

$$\xi+\eta:a\mapsto\xi(a)+\eta(a),$$

$$\xi\eta=\eta\circ\xi:a\mapsto\eta(\xi(a)).$$

そして，この$\mathcal{E}$(Q)の加法と乗法は，いま定義した量の比の加法，乗法と同じものである。

比a：aは乗法に関する単位元である。これを1_Qで表わす。また，a：bとb：aは，乗法に関して互いに他の逆元である。1_QにはQの恒等変換が応じ，逆元の関係には，Qの逆変換の関係が応じる。

比の加法と乗法に関しては，つぎのことが成立つ：

(4.3.3) $(\xi+\eta)+\mu=\xi+(\eta+\mu)$

(4.3.4) $\xi+\eta=\eta+\xi$

(4.3.5) $(\xi\eta)\mu=\xi(\eta\mu)$

また(4.1.4)′より，

(4.3.6) $\xi\eta=\eta\xi$

さらに，加法と乗法についての分配法則：

(4.3.7) $(\xi+\eta)\mu=\xi\mu+\eta\mu$

が成立つ。実際，(4.3.6)より，$\mu(\xi+\eta)=\mu\xi+\mu\eta$を言えばよいが，a∈Qに対して$(\mu(\xi+\eta))\cdot a=(\mu\xi+\mu\eta)\cdot a$なることが直ちに確かめられる。

(4.3.7)は，つぎのそれぞれと同値である：

(4.3.8) $a:b=c:d \Rightarrow a:b=(a+c):(b+d)$.

(4.3.9) $\xi\cdot(a+b)=\xi\cdot a+\xi\cdot b$ $(a, b\in Q, \ \xi\in\mathcal{R}(Q))$.

(4.3.7) ⇒ (4.3.8) ⇒ (4.3.9) ⇒ (4.3.7)の順に証明しよう。(4.3.7)が成立つとして$\mu=a:b=c:d$，$\xi=a:a$，$\eta=a:c$とおくと，$\mu\cdot(a+c)=\mu\cdot(\xi\cdot a+\eta\cdot a)=((\xi+\eta)\mu)\cdot a=(\xi\mu+\eta\mu)\cdot a=\mu\cdot(\xi\cdot a)+\mu\cdot(\eta\cdot a)=b+d$； よって$a:b=\mu=(a+c):(b+d)$. (4.3.8)が成立つとして $\xi=a:c=b:d$ とすれば，$\xi=(a+b):(c+d)$； よって $\xi\cdot(a+b)=c+d=\xi\cdot a+\xi\cdot b$. 最後に，(4.3.9)が成立つとしてa∈Q，$\xi=a:a$, $\eta=a:b$とすれば，$((\xi+\eta)\mu)\cdot a=\mu\cdot(\xi\cdot a+\eta\cdot a)=\mu\cdot(a+b)=\mu\cdot a+\mu\cdot b=\mu\cdot(\xi\cdot a)+\mu\cdot(\eta\cdot a)=(\xi\mu+\eta\mu)\cdot a$； よって$(\xi+\eta)\mu=\xi\mu+\eta\mu$.

比の乗法の定義と(4.3.6)から，

(4.3.10) a，b∈Q，$\xi\in\mathcal{R}(Q)$に対し，
$\xi(a:b)=(a:b)\xi=a:\xi\cdot b$.

関係＜と加法，乗法の二つの演算の間には，つぎのことが成立つ：

(4.3.11) $\xi<\eta \Rightarrow \xi+\mu<\eta+\mu$

(4.3.12) $\xi<\eta \Rightarrow \xi\mu<\eta\mu$.

実際，(4.2.6)′より，a∈Qに対して，$\xi\cdot a<\eta\cdot a$から$(\xi+\mu)\cdot a<(\eta+\mu)\cdot a$，$(\xi\mu)\cdot a<(\eta\mu)\cdot a$を導けばよいが，第一のものは(3.1.3)から，第二のものは(4.1.6)′から，それぞれ結論される。

V. 量と数

5－1　数の導出

前章では，量Qから量の比の集合として$\mathcal{R}$(Q)を定義し，これに大小関係＜と，二つの演算 ― 加法と乗法 ― を導入した。$\mathcal{R}$(Q)の代数的構造は，今の段階では，加法については可換半群，乗法については可換群 ― 但し，加法と乗法の間に分配法則が成立つところの ― である。

さて，$\mathcal{R}$(Q)からかかる順序構造と代数的構造とを純粋に抽象するとき，われわれは実質的に＜数＞を得たことになる。歴史的には，Ⅳ章のはじめに述べたように，各種の量Q_i（i＝1，2，……）において$\mathcal{R}(Q_i)$に共通の構造を見出すに至り，その構造を＜数＞の体系として実体化するという具合にして，＜数＞は認識の対象となってきた。

$\mathcal{R}$(Q)は，Qが離散量，“有理量”，“無理量”（[5，(3)]）のそれぞれの場合に，自然数**N**，正の有理数$\mathbf{Q}^+$，正の実数$\mathbf{R}^+$となる。また，これまで，加法に関して群構造をもつような量Qを取り上げてこなかったが（しかし議論は並行して進む），かかるQが“有理量”，“無理量”のそれぞれの場合，$\mathcal{R}$(Q)は有理数**Q**，実数**R**となる。

5－2　量としての数

量Qに対しては，それの構造を定めるものとして，これまで大小関係（ch.Ⅱ）と加法（ch.Ⅲ)，それに$\mathcal{R}$(Q）を作用域とする外算法（§4.1）を考えてきた。加法に関してQは可換半群で，外算法はつぎの条件を満たしていた：

$$\xi\cdot(a+b)=\xi\cdot a+\xi\cdot b,$$
$$(\xi+\eta)\cdot a=\xi\cdot a+\eta\cdot a,$$
$$(\xi\eta)\cdot a=\eta\cdot(\xi\cdot a)=\xi\cdot(\eta\cdot a).$$

(なお，作用ξ・は，“ξ倍”の倍作用と解釈されるものである。）また，$\mathcal{R}$(Q）はQに対して推移的に作用する。

因に，量Qに$\mathcal{R}$(Q）を作用域とする外算法の構造を考えることにより，所謂“等分除”，“包含除”なるものに，簡潔な定義を与えることができるようになる。即ち，$b=\xi\cdot a$（a，b ∈Q，$\xi\in\mathcal{R}$(Q)）において，ξに対しaを求めるのが“等分除”$b\div\xi$であり，aに対しξを求めるのが“包含除”$b\div a$である。(註)

さて，$\mathcal{R}$(Q）の普遍モデルとしての数$\mathcal{R}$は，しばしば，量Qの普遍モデルとして機能させられる。この場合，$\mathcal{R}$においては量Qと同型の構造が考えられており，同型を媒介にして$\mathcal{R}$の場で量が取り扱われる。

量としての$\mathcal{R}$は，加法と乗法から定まる代数的構造をもつ$\mathcal{R}$── これを$\mathcal{R}$(＋，×)で表わそう ── ではない。実際，量としての$\mathcal{R}$には乗法は定義されない。代わりに，そこでは$\mathcal{R}$(＋，×）が作用域の外算法＝倍作用（これは，$\mathcal{R}$(＋，×）の乗法に同じ）が考えられていて，加法＋とこの外算法・が，$\mathcal{R}$の順序構造とともに，$\mathcal{R}$を量として特徴づけることになる ── この場合の$\mathcal{R}$を$\mathcal{R}$(＜；＋,・）で表わすことにしよう。

量Qは，$\mathcal{R}$(Q）を作用域とする外算法をもっているが，$\mathcal{R}$(Q）は$\mathcal{R}$(＋，×）である。そして，Qと$\mathcal{R}$(＜；＋,・）との同型：$Q\simeq\mathcal{R}$(＜；＋,・）が，あるu∈Qを特定することによって，つぎのように与えられる：

$$u^{-1}:a\mapsto u:a$$

この同型u^{-1}は，“uを単位としてaを測る”ことを意味している（〔3（2），p.57〕）。

u^{-1}が，実際，Qと$\mathcal{R}$(＜；＋,・)の構造に関する同型になっていることを確認しよう。先ず，u^{-1}はQから$\mathcal{R}$の上への1対1写像である（(4.1.1)，(4.1.2)）。Qの二元a，bに対して，a＜bとu：a＜u：bは同値（(4.2.1)）。比の加法の定義から，$u^{-1}(a+b)=u:(a+b)=(u:a)+(u:b)=u^{-1}(a)+u^{-1}(b)$。最後に，$\xi\in\mathcal{R}(Q)=\mathcal{R}$とすると，（4.3.10）より，$u^{-1}(\xi\cdot a)=u:(\xi\cdot a)=\xi\,(u:a)=\xi\cdot u^{-1}(a)$。

こうして，数$\mathcal{R}$に対しては，$\mathcal{R}$(＋，×)と$\mathcal{R}$(＜；＋,・）の二様の解釈が先ずとれる。さらに，$\mathcal{R}$(Q）の元に“量の比”と“量に対する倍作用”の二つの意味をとれるのに対応して，$\mathcal{R}$(＋，×）の元には“数”と“量としての数に対する倍作用”の二つの意味をとれる。後者の意味においては，$\mathcal{R}$(＋，×）の元は存在として自立していない。

数と量との違いを議論しようとするときには，この点がしっかり押えられていなければならない。＜数＞を“数の体系”$\mathcal{R}$(＋，×）として考えていながら　数は量と違うなどと言ってもはじまらない。他方，“倍作用”を外算法としてもつ$\mathcal{R}$(＜；＋,・)は，しっかり＜量＞であって，構造の上では量Qと区別できない。

例えば，“量の正負が便宜的な取り決めなのに対し数の正負は非対称的 ── e.g. 1×1＝1なのに対し，(−1)×(−1)＝−1とはならない”（cf.〔6，Ⅱ，p.58〕）とは言っても，$\mathcal{R}$(＜；＋,・）での正負は対称的である。このときには，(−1)×(−1)＝1は$\mathcal{R}$(＜；＋,・）の外算法 $\underline{(-1)}\cdot(-1)=1$ とみなければならない。作用としての$\underline{-1}$は，各a∈$\mathcal{R}$を加法に関するそれの対称元−aにかえるものである。そしてここでは，数は全く対

称的である：

$$\underline{1}\cdot 1=1 \text{ に対して } \underline{1}\cdot(-1)=-1,$$
$$\underline{(-1)}\cdot 1=-1 \text{ に対して } \underline{(-1)}\cdot(-1)=1.$$

(註) 量に関する除法としては，もう一つの形がある。小島氏は〔3(4)〕で，ある種の量が二つの量 Q_1，Q_2（実数体上の1次元線型空間）に対する $Q_1\otimes Q_2$ として導出できることを示したが，この場合，$b=a_1\otimes a_2$（$a_1\in Q_1$，$a_2\in Q_2$）と a_1 に対し a_2 を求める除法 $b\div a_1$ と，b と a_2 に対し a_1 を求める除法 $b\div a_2$ を考えることができる。このような除法としては，例えば（長方形の面積）÷（ヨコの長さ）＝（タテの長さ）がある。

5－3 数の比

数が量のモデルとして機能し得るには，量の比に対応するものとして数の比が扱えなければならない。数の比を定義する $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ 上の同値関係～は，$(\xi,\eta)\sim(\xi',\eta')$ を，条件 $\mu\cdot\xi=\eta$，$\mu'\cdot\xi'=\eta'$（$\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}(+,\cdot)$ に推移的に作用する／）が $\mu=\mu'$ を導くことと定義することによって与えられる。実際，$u\in Q$ に対する Q の $\mathcal{R}(Q)$ の上への同型 $u^{-1}: a\to u: a$ によって，Q上の同値関係はこの関係にうつされる。(即ち，同値類 $\mu\in\mathcal{R}(Q)$，$\subset Q\times Q$ に対する $(u^{-1}\times u^{-1})(\mu)$ が，$\mu\cdot\xi=\eta$ なる $(\xi,\eta)\in\mathcal{R}(Q)\times\mathcal{R}(Q)$ の全体と一致する。)

なお，$u\in Q$ に対する同型 $u^{-1}: Q\simeq\mathcal{R}(Q)=\mathcal{R}$ によって，Qの量の比 $a:b$ と対応している数の比 $(u:a):(u:b)$ は，a，b を u を単位として測ったときの測定値の比に他ならない。

$\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ の上の同値関係～からは $\widetilde{\mathcal{R}}=(\mathcal{R}\times\mathcal{R})/\sim$ が定義される。$\mathcal{R}$ が離散量Qに対する $\mathcal{R}(Q)$ であれば，$\widetilde{\mathcal{R}}$ は正の有理数 $\mathbf{Q}^+$ となる。また，$\mathcal{R}$ が実数 $\mathbf{R}$，あるいは正の実数 $\mathbf{R}^+$ のときには，$\widetilde{\mathcal{R}}$ は対応 $(1:\xi)\leftrightarrow\xi$ によって $\mathcal{R}$ と同一視し得るものであって，実質的に，新しい数学的対象は得られていない。

VI. 比と“比の値”

比とは，あくまでも，ある量体系Qの中の二つの量の間の比である。われわれはそれを，いくつかの公理をみたす $Q\times Q$ 上の同値関係に対する同値類として定義した。

しかしここに，異なる二つの量体系 Q_1 と Q_2 に対して，Q_1 の量の比と Q_2 の量の比は，$\mathcal{R}(Q_1)$ と $\mathcal{R}(Q_2)$ との同型を通じて対応がつくことになる。特に，その同型に関しては，量としての数 $\mathcal{R}$ が媒介していることが，一般的または実際的である。即ち，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(Q_1) \arrow[dr, "u_1^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & \mathcal{R}(Q_2) \arrow[dl, "u_2^{-1}"] \\
& \mathcal{R} &
\end{tikzcd}$$

の形で，Q_1 の量の比と Q_2 の量の比に対応がつけられる。

ここでの≪同型を通じて対応がつく≫ということは，あくまでも，“等しい”と読んではならないものである。例えば，〔6，Ⅲ，p.68〕で問題にされた表現

$$2\,\mathrm{m}:4\,\mathrm{m}=5\,\mathrm{kg}:10\,\mathrm{kg}$$

であるが，これは，≪($2\,\mathrm{m}:4\,\mathrm{m}$)と($5\,\mathrm{kg}:10\,\mathrm{kg}$)の対応づけで $\mathcal{R}$(長さ)と $\mathcal{R}$(重さ)との間に同型が定義できる≫と読むより他に仕様のないものであり，等号“＝”の通常の用法からすると不適当な使用と言わねばならない。

式 $2\,\mathrm{m}\div 4\,\mathrm{m}=5\,\mathrm{kg}\div 10\,\mathrm{kg}$ についても，事情は変わらない。即ち，これを等式 $1/2=1/2$ のこととして意味をもたせようというのも（〔6，Ⅲ，p.68〕），本当を言って，無理がある。実際，この場合，$1/2$ の〈身分〉というものが問題になるのである。$2\,\mathrm{m}\div 4\,\mathrm{m}$ は $4\,\mathrm{m}$ を $2\,\mathrm{m}$ にうつす倍作用を求める演算で，$5\,\mathrm{kg}\div 10\,\mathrm{kg}$ は $10\,\mathrm{kg}$ を $5\,\mathrm{kg}$ にうつす倍作用を求める演算である。その倍作用は，作用する対象が異なるカテゴリーのものである

以上，まったく別物であり（長さを1／2倍する作用と重さを1／2倍する作用は違う!），この意味で“＝”で結べるようなものではない。あくまでも，$\mathcal{R}$(長さ)と$\mathcal{R}$= $\mathbf{R}^+$ と$\mathcal{R}$(重さ)の間の同型を介して2m÷4m と1／2と5kg÷10kgは結びつくのである。

以上の議論を踏まえて，同じ〔6，Ⅲ〕の中で田村氏が問題提起している“比”と“比の値”の区別のことについて，以下，筆者の考えを述べることにする。

氏はそこで，

“私は，“通約不可能な二量の存在”を学ぶより前に，比と比の値を区別するのは意味がないと思う。他方，実数の概念を学んだあとでは，両者を区別する必要が失われてしまう。”

と述べている（p.68）。果たしてそうであろうか。筆者も，“文法”の問題としては──よって，数学的対象の問題としては──“比”と“比の値”を区別する必要のないことを認める。実際，量の比5m：10mに対し，

5m：10m＝5：10，

5m：10m＝0.5

という具合に“(数の)比”と“(量の)比の値”で書くときに，5：10は$\mathcal{R}$(Q)の元としての5m：10mに，0.5は5mに倍すれば10mになるような$\mathcal{E}$(Q)の元に，それぞれ同型を介して対応する。ここでの$\mathcal{R}$(Q)の元と$\mathcal{E}$(Q)の元──こちらの方はグラフとして──は，Q×Qの同じ部分集合である。

しかし，“文法”の上からは区別する必要がなくとも，“意味”が関わってくるときには，“比”と“比の値”は区別されるべきものである。そして，筆者の考えでは，“意味”の上から“比”と“比の値”を区別して扱うことが，重要な教育的配慮となる。抑々“比”は，＜実質＞の上にさらに＜表現＞が問題になっている概念である。例えば，a：b＝1：2と書くか，それともa：b＝50：100と書くかといったことが，意味伝達上の問題として持ち上がる。如何に表現するかによって対象は扱い易くも扱い難くもなるから，“それはどちらでもよい”ということにはならない。ところが，ここで表現上大事にしている“意味”は，a：b＝0.5としてしまうことで完全に＜疎外＞されてしまうのである。

おわりに

授業のプラニングにおいては，教材(内容)をどう教えるかの問題以前に，教材が抑々“何”であるかという問題がある。算数の対象は数学の枠組に収まるものではなく，数学では等価な様々な＜意味＞にも互いにはっきり区別をつけることが，算数ではしばしば本質的なことになる。このような意味で，教材研究の奥行きは非常に広く深い。

勿論，教材の“何”は必ずしもそのまま子どもに与えられるものとはならない。しかし，教材について理解されたことが，教材をどのようなものとして教えなければならないのか，そしてそのためにはどう教えるのがよいのかを考えるための，枠組を与えていく。また，本来そうでなければならない。

本論文では，このような問題意識に立って，量と数の“何”たるかについて若干の考察を試みた。

引用文献

〔1〕Bourbaki，N.『数学原論』「位相2」，東京図書，1968.

〔2〕銀林 浩 “現代数学と数学教育──量と構造についての一視点” 数学セミナー，1972.10月，pp.40－47.

〔3〕小島 順 ““量の計算”を見直す（1－6)” 数学セミナー，1977.8月－1978.1月.

〔4〕南雲道夫 “量と実数(上)” 数学セミナー，1979.1月，pp.64－68.

〔5〕竹内 啓 “量概念の意味と役割──広義の応用的立場から(1－5)” 数学セミナー，1978.8－12月.

〔6〕田村二郎 “量と数の理論(Ⅰ－Ⅳ)”，数学セミナー，1978.3－6月.